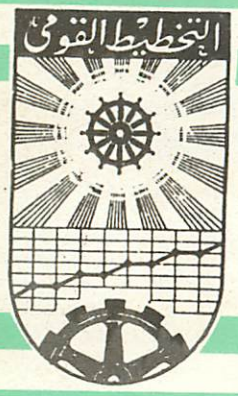
جمهورية مصر العربية



معهد التخطيط القومي

مذكرة خارجية رقم (١٤٩٢)

طريقة لحل مشكلة التجميع (أو التوزيع) ذات الصفة التكرارية

أعداد

د . محمد يحيى عبد الرحمن

يناير ١٩٨٩

تقديـــم :

تم مناقشة وقبول هذا البحث فى المؤتمر السنوى السادس عشر للاحصـــــــاء وعلوم الحاسب وبحوث العلمليات والرياضيات وتطبيقاتها الذى عقد بمعهـــــــــد الدراسات والبحوث الاحصائية بجامعة القاهره فى الفترة من ١٤ـ١٧ ديسمبر ١٩٨١.

طريقة لحل مشكلة التجميع (أو التوزيع) ذات الصفة التكرارية *

مقدمـــــــــة : ـ

يقصد هنا بمشكلة التجميع أو التوزيع ، المشكلة المعروفة بأسم :

Vehicle Fleet Scheduling Problem

والتى نفترض كميات ثابتة من منتج ما عند نقاط مختلفة ويراد تجميع هذه الكميات الى نقطة ما متوسطـــة باستخدام اسطول من العربات . والمطلوب معرفة خط سير كل عربة بحيث تكون تكاليف خطوط الســـير الاجمالية أقل ما يمكن .

الحالة الكلاسيكية لهذه المشكلة نفترض :

أ) أن الكمية الموجودة عند كل نقطة (مصدر) ثابتة لا تتغير بتغير الزمن .
ب) أن عملية التجميع أو التوزيع تتم لفترة واحدة وتنتهى بعدها المشكلة .

سنفترض الان الحالة الاكثر واقعية وتطبيقا وهى :

أ) أن الكمية الموجودة عند كل نقطة (مصدر) تزداد بزيادة الزمن .
ب) أن سرعة تواجد هذه الكميات عند النقاط المختلفة ثابتة أو متغيرة .
جـ) أن عملية التجميع أو التوزيع تتم لفترات متتالية .

وبالافتراضات السابقة يمكن تطبيق هذه المشكلة تطبيقا عمليا فى أكثر من مجال حيوى نذكـر منها على سبيل المثال :

١ ـ تخطيط شبكة نقل قطاعية .
٢ ـ مجموعة من المناطق الزراعية يتوسطها مصنع للتعليب .
٣ ـ مجموعة من مناطق استهلاك (أسواق ـ مجمعات تعاونية ..... الخ) يتوسطهـا مركز توزيع (مخزن أو مصنع أو ....) .
٤ ـ منطقة مبانى يتوسطها مستودع توزيع للاسمنت أو الحديد أو ....
٥ ـ مؤسسة أو هيئة أو مدرسة خاصة أو شركة أو مصنع أو معهد يقوم بعمل ورديتـــين يوميا أحداها لتجميع العمال والموظفين من أماكن انتظار معينة وأخرى للعـــودة بهم الى نفس الاماكن (يطبق فيها الحالة الكلاسيكية من المشكلة) .

وسنورد الصيغ الرياضية التى يمكن استنتاجها فى الحالات السابقة

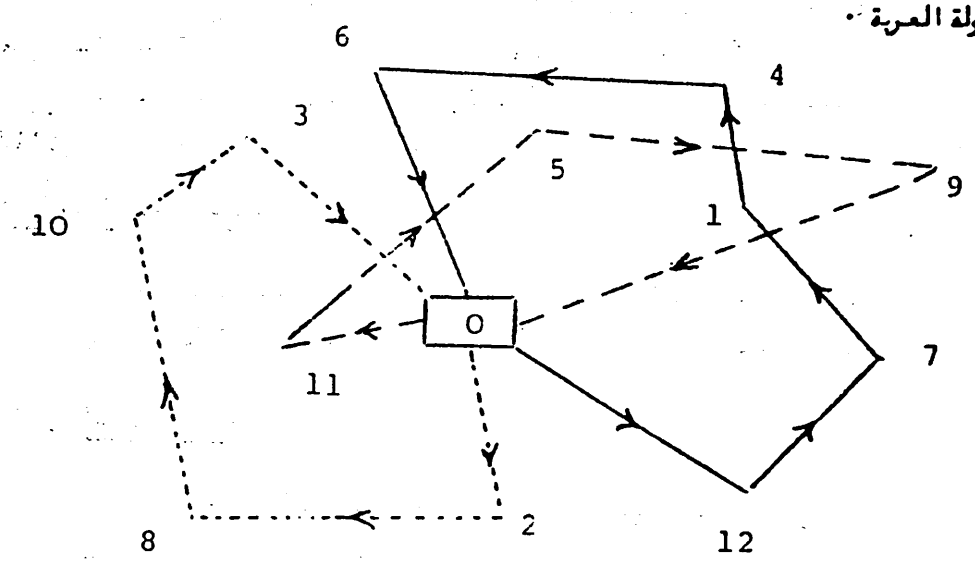
---

* د . محمد يحيى عبد الرحمـــــن
خبير بمركز التخطيط الصناعى ـ معهد التخطيط القـــومى

مكونات المشكلـــــــــــة : ـ

أ ـ تعريـــــــــــف : ـ

١ ـ سنطلق أسم مسار Path (شكل ١) على مجموعة النقاط التى يمكن للعربة أن تمر بها لتجميع الكميات الموجودة عند كل منها بحيث لا تزيد مجموع هذه الكميات عن سعـــــــة أو حمولة العربة .



(النقطة O تمثل مركز التجميع أو التوزيـــــع)

(شكـــــل ١)

٢ ـ زمن المسار هو مجموع الازمنة التى تأخذها العربة للمرور على النقاط (المصادر) الـــتى توجد على هذا المسار ، مجموع الازمنة اللازمة للشحن (أو التعريغ) ، مجموع الازمنة التى تنتظرهـــا العربة عند كل مصدر للراحة بعد عملية الشحن (أو التفريغ) .

٣ ـ المسار الذى يمكن أخذه فى الاعتبار هو المسار الذى لا يزيد زمنه عن زمن معين ومجمـــوع الكميات التى يمكن جمعها بالعربة من مصادر الانتاج الموجودة عليه لا تزيد عن حمولة أو سعة العربة .

٤ ـ تكاليف تشغيل الاسطول يتناسب مع المسافة المقطوعة بواسطـــــته .

ب ـ الرموز المستخدمـــــــة (١)

سنفترض الرموز التالية والتى سبق استخدامها فى ورقة بحث سابقة : ـ

---

(١) ورقة بحث مقدمة الى المؤتمر الدولى الخامس للاحصاء والحسابات العلمية والبحوث الاجتماعية والسكانية المنعقد فى الفترة من ٢٩ مارس ـ ٣ أبريل ١٩٨٠ تحت عنوان :
The optimum production rate in the "Vehicle Fleet Scheduling problem".

بافتراض أن المسار p^j فيه :

q_i^j : الكمية الأولية (الابتدائية) الموجودة عند المصدر i الموجود على المسار p^j .

$t(i,k)$: الزمن الذى ستأخذه العربة عند التحرك من المصدر i للوصول الى المصدر k .
وسنفترض أن $t(i,k)=t(k,i)$. أى أن خطوط سير العربات فى شبكة النقل المفروضة هى خطوط مزدوجة .

A : معدل تزايد الكميات الموجودة عند المصادر المختلفة مع زيادة الزمن (سرعة انتاج المصادر).

B : الكمية التى يمكن شحنها فى العربة فى كل وحدة زمن .

Q_i^j : الكمية الكلية التى ستجمعها العربة عند المصدر i الموجود على المسار p^j

C : سعة العربة أو أقصى حمولة لها (سنفترض أنها ثابتة لجميع العربات).

$\bar{Q}^j$: الكمية الكلية المجمعة على المسار p^j (وتكون أقل من أو تساوى C).

$\bar{r}$: عدد مصادر الانتاج الموجودة على المسار p^j .

To : زمن راحة بعد عملية الشحن أو التفريغ عند كل مصدر .

T^j : الزمن الكلى للمسار p^j (وهو الزمن الذى تأخذه العربة من بدء قيامها من مركز التجميع أو التوزيع وحتى الرجوع اليه بعد عملية التجميع).

وقد سبق أن اوجدنا المعادلات التالية :-

- الكمية الكلية التى يمكن للعربة أن تجمعها على مسارها p^j فى اتجاه معين تعطى بالمعادلة :

$$Q_*^j = \sum_{i=1}^{r} Q_i^j = \sum_{i=1}^{r} \left[q_i^j + \left\{ \sum_{h=1}^{i} t(h-1,h) + B. \sum_{k=1}^{i-1} Q_k^j \right\} .A \right] \quad \ldots (1)$$

وأن :

$$T^j = \sum_{i=1}^{r} t(i-1,i) + t(r,o) + B.Q^j + r.\ To \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

- بافتراض أن Q^j تمثل الكمية الكلية المجمعة على المسار p^j عندما تأخذ العربة الاتجاه المباشر $D\ (o \to 1 \to 2 \ldots r-1 \to r \xrightarrow{*D} o)$ وأن Q_{*R}^j تمثل الكمية الكلية المجمعة على المسار p^j عندما تأخذ العربة الاتجاه العكسى $R : (o \to r \to r-1 \ldots 2 \to 1 \to o)$

فـــــــان :

$$Q_{*D}^j - Q_{*R}^j = A. \left[\sum_{k=o}^{r-1} \left\{ t(k,k+1) - t(r-k+1,r-k) \right\} \sum_{s=1}^{r-k} \binom{r-k}{s} A^{s-1}.B^{s-1} + B. \sum_{k=1}^{r-1} (Q_k^j - Q_{r-k+1}^j) \sum_{m=1}^{r-k} \binom{r-k}{m} A^{m-1} B^{m-1} \right] \quad \ldots (3)$$

وهذا الفرق قد يكون سالبا أو موجبا .

ويتضح من المعادلتين (1) ، (3) أنه عندما تكون $A=o$ فان :

$$Q^{j}_{*} = \sum_{i=1}^{r} q^{j}_{i}$$

$$Q^{j}_{*D} - Q^{j}_{*R} = o$$

ومعنى ذلك أنه فى الحالة الكلاسيكية لهذه المشكلة (عندما $A=o$) فان الكمية الكلية التى تجمع على المسار P^{j} سواء فى الاتجاه المباشر D أو الاتجاه العكسى له R لن تتغير .

مشاكل التوزيع (أو التجميع) ذات الصفة التكرارية :-

سنفترض الان أن دورة التجميع أو التوزيع يمكنها أن تتكرر أكثر من مرة خلال فترة زمنية معينة T_{max} (يوم مثلا) ويمكن أن ينشأ هذا الوضع اذا كان :

$$T_{max/1}{}^{j} \geq N \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

حيث N عدد صحيح موجب يمثل عدد الدورات الكاملة التى يمكن للعربة أن تقوم بها خلال فترة العمل T_{max} . ونظرا لان الكميات المجمعة تزداد مع الزمن ($A > o$) ، لذا فان كل مصدر سيستمر فى عملية الانتاج من بداية T_{max} وحتى نهايتها . وبالتالى سنتوقع وجود كميات منتجه عند كل مصدر انتاج بعد آخر دورة تجميع تقوم بها العربة . ولذا فاننا سنواجه بأحد احتمالين :

١) اما أن الكميات المنتجة يمكنها أن تنتظر لتجمع فى بداية الفترة التالية .

٢) واما أن المنتج لا يتحمل الانتظار للفترة التالية ولذا يجب تجميعها فى نهاية الفترة محل الدراسة .

وفى الحالتين فان الهدف الرئيسى هو تجميع أكبر كمية ممكنة خلال الفترة محل الدراسة بأقل تكاليف ممكنه . ولتحقيق ذلك يلزم :-

أولا : تحديد المسار ذو أقل (تكلفة أو زمن أو ...) والذى يحقق الشروط التى يفترضها المخطط مثل :

١) الا تزيد زمن الدورة عن زمن معين .

٢) الا تزيد الكمية المجمعة عن وزن معين .

٣) الا تزيد حجم العبوات المجمعة عن حجم معين وهكذا .....

ثانيا : حساب نوعين من الازمنة يتوجب على كل عربة أن تنتظرها فى مركز التجميع o ، كى تستطيع العربة جمع الكميات المنتجة خلال هذه الازمنة والعودة بها الى مركز التجميع باقصى حمولة لها . وهذين النوعين من الازمنة هما :

i) زمن انتظار فى مركز التجميع مابين نهاية دورة تجميع وبداية الدورة التى تليها (وسنرمز لها بالرمز T_s).

ii) زمن انتظار فى مركز التجميع فى بداية كل فترة حتى تتكون عند مراكز الانتاج الموجودة على المسار الكميات الابتدائية المناسبة كى تعود العربة بأقصى حمولتها (وسنرمز لها بالرمز T'_s).

ولتحديد المسار ذو أقل (تكلفة أو زمن أو ..... الخ) ، فاننا يمكن اتباع احدى الطرق التقليدية المعروفة . ويتبقى بعد ذلك حساب نوعى ازمنة الانتظار T_s , T'_s السابق الاشارة اليهما . من البديهى أنه يمكن للعربة أن تقوم بعملية التجميع أكثر من مرة فى الفترة الواحدة على مسار ثابت اذا تساوت الكمية الابتدائية* المتكونة عند المصدر i فى بداية الدورة محل البحث مع الكمية الابتدائية التى تكونت عند نفس المصدر i فى الدورة التى سبقتها .

ولكن الكمية الابتدائية q_i^j عند المصدر i الموجود على المسار p^j تعتمد على :

١ ـ معدل الانتاج A_i لهذا المصدر ،

٢ ـ الزمن المنقضى (المنصرم) بين مرور العربة عند هذا المصدر ووصولها الى مركز التجميع ،

٣ ـ زمن انتظار T_s للعربة عند مركز التجميع .

فبافتراض مسار يحتوى على r من مصادر الانتاج حيث الكميات الابتدائية الموجودة عند مصادر الانتاج هى q_1^j , q_2^j , ... , q_r^j وأن سرعات الانتاج لهذه المصادر هى : $A_1, A_2, \ldots, A_r$ وأن To هو زمن الراحة بعد عملية الشحن عند كل مصدر فاننا نجد أن :

$$q_1^j = \{B.\ Q_1^j + t(1,2) + B.\ Q_2^j + t(2,3) + \ldots. + t(r-1,r) + B.\ Q_r^j + t(r,o) + r.\ To + Ts\}.A_1 ;$$

$$q_2^j = \{B.\ Q_2^j + t(2,3) + B.\ Q_3^j + \ldots + t(r-1,r) + B.\ Q_r^j + t(r,o) + (r-1)\ To + T_s\}.A_2 ;$$

$$q_r^j = \{B.\ Q_r^j + t(r,o) + To + Ts\}.A_r$$

---

* سنفترض أن الكمية الابتدائية هى الكمية التى توجد عند المصدر لحظة بداية تحرك العربة من مركز التجميع الى المصادر المختلفة الموجودة على مسار خط سيرها .

وبذا فاننا نجـــــــــد أن :

$$q_i^j = \left\{ \sum_{k=i}^{r} t(k,k+1)\ B. \sum_{m=i}^{r} Q_m^j + (r-i+1)\ To + {}^{T}s \right\} . A_i \ldots . \quad (5)$$

حيـــث $t\ (r,r+1) = t(r,o)$.

وبطريقة أخرى اذا افترضنا أن T^j هو الزمن الكلى للمســـــار P^j ،

أى أن :

$$T^j = t(o,1) + B.\ Q_1^j + t(1,2) + B.\ Q_2^j + \ldots . + t(r-1,r) + B\ Q_r^j +$$

$$t(r,o) + r.\ To$$

فانه يمكننا حساب الكميات الابتدائية عند المصادر المختلفة كما يلى :

$$q_1^j = \left\{ T^j + {}^{T}s - t\ (o,1) \right\} .\ A_1 \ ;$$

$$q_2^j = \left\{ T^j + T_s - t\ (o,1) - B.\ Q_1^j - t(1,2) - To \right\} . A_2 \ ;$$

$$q_r^j = \left\{ T^j + T_s - t(o,1) - B.Q_1^j - t(1,2) - B.Q_2^j - \dots - B.Q_{r-1}^j \right.$$

$$\left. -t(r-1,r) -(r-1).\ To \right\} .A_r$$

أى أن

$$q_i^j = \left\{ T^j + T_s - \sum_{k=1}^{i} t(k-1,k) - B. \sum_{m=1}^{i-1} Q_m^j - (i-1)\ To \right\}. A_i$$

حيث $Q_m^j = o$ عندما $i=1$

حساب النوع الاول من أزمنة الانتظار T_s :

كما سبق أن ذكرنا أنه يمكن للعربة أن تنفذ عملية التجميع على نفس المسار أكثر من مرة اذا امكن للعربة أن تنتظر زمنا T_s عند مركز التجميع يكون كافيا لتكوين نفس الكميات الابتدائية التى كانت موجودة عند مصادر الانتاج المختلفة فى دورة التجميع السابقة ، وبالتالى فانه يمكن للعربة فى هذه الحالة تجميع نفس الكمية Q_*^j أى أن

$$Q_*^j = (T^j + T_s) \sum_{i=1}^{r} A_i \leq C \quad \dots\dots (7)$$

وفى هذه الحالة ايضا فانه يمكن للعربة أن تقوم بأكثر من عملية تجميع خلال فترة العمل T_{max} ، اذا كان :

$$T_{max} / (T_s + T^j) \geq N$$

حيث N عدد صحيح موجب .

من المعادلة (7) يمكن حساب الزمن T_s الذى يجب على العربة أن تنتظره فى مركز التجميع حتى يمكنها أن تبدأ دورة التجميع على المسار p^j وتعود الى مركز التجميع بكمية Q^j_* .

باستخدام المعادلة (2) والتعويض بها فى المعادلة (7) نجد أن :

$$T_s = \frac{Q^j_*}{\sum_{i=1}^{r} A_i} - T^j = \frac{Q^j_*}{\sum_{i=1}^{r} A_i} \quad (1-B.\sum_{i=1}^{r} A_i) - \sum_{k=1}^{r+1} t(k-1,k) - r.To \quad (8)$$

حيث $t(r,r+1) = t(r,o)$

حساب النوع الثانى من أزمنة الانتظار T'_s :

سبق أن أفترضنا أن T_{max} تمثل زمن فترة العمل والتى يتوجب فيها أن يعمل كل مصدر انتاج من بدايتها حتى نهايتها . فى آخر دورة تجميع تقوم بها العربة على مصادر الانتاج التى توجد على مسارها ، فان هذه المصادر لن توقف انتاجها بل ستستمر عملية الانتاج حتى نهاية فترة العمل . وبالتالى نستنكون عند كل مركز انتاج كميات من المنتج تمثل كميات ابتدائية* عند تلك المراكز لفترة العمل التالية . وقد يتطلب الأمر أن تنتظر العربة فى بداية فترة العمل التالية زمنا يكون كافيا بحيث تبدأ العربة تحركها على مصادر الانتاج الموجودة على مسارها** وأن تعود بأقصى حمولتها .

بعد آخر دورة تجميع فان الوقت المتبقى قد لا يكون كافيا كى تنتظر العربة فى مركز التجميع زمنا قدرة T_s ثم تقوم بعمل دورة تجميع زمنها T^j . فاذا رمزنا لهذا الزمن

---

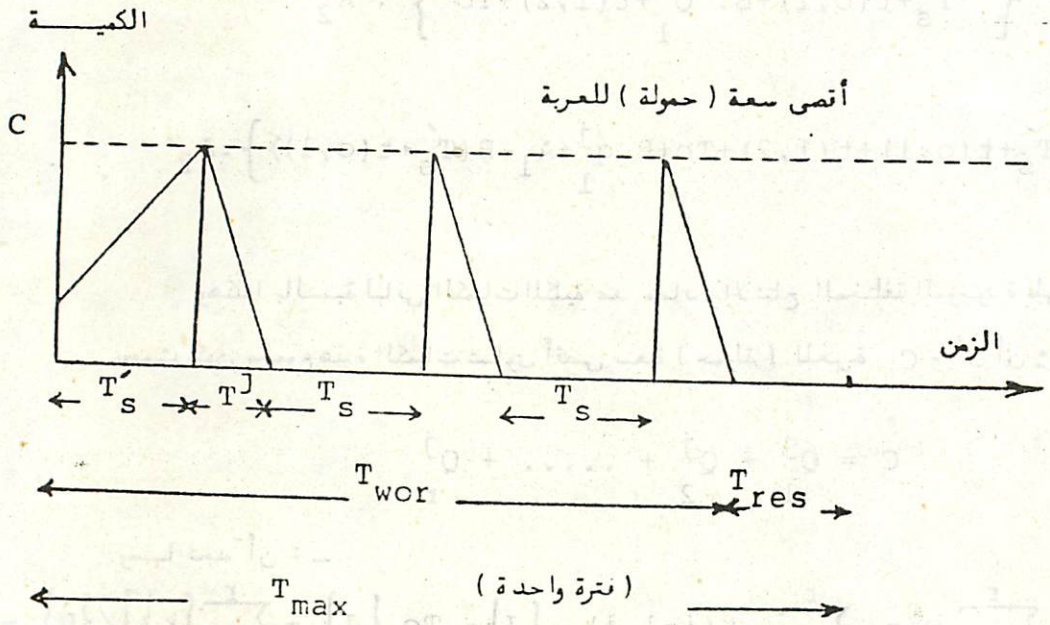
* وذلك بافتراض أن المنتج يمكنه أن يتحمل الانتظار للفترة التالية .

** بافتراض أن هذه المسارات ثابتة وسبق تعيينها من الدورات السابقة واذا لم يتحقق هذا الفرض فيجب تعيين المسارات الجديدة للفترة محل البحث بناءا على الكميات الابتدائية الموجودة عند كل مركز انتاج .

المتبقى بالرمز T_{res} للزمن المنقض من بداية فترة العمل وحتى عودة العربة بعد آخر دورة تجميع الى مركز التجميع بالرمز T_{wor} ، فان هذا الزمن المتبقى لن يكون كافيا كى تعمل العربة دورة أخرى اذا كان :

$$T_{res} = T_{max} - T_{wor} < T_s + T^j \qquad (9)$$

ولحساب الكميات المنتجة عند مصادر الانتاج فى الزمن المتبقى T_{res} ، والتى تمثل كميات ابتدائية فى بداية الفترة التالية ، سنفترض مسارا p^j مكونا من r من مصادر الانتاج وسرعة الانتاج عند المصدر i هى A_i سنجد أن :



$$q_r^j = \left\{ B.Q_r^j + t(r,o) + To + T_{max} - T_{wor} \right\} . A_r$$

$$q_{r-1}^j = \left\{ B.(Q_{r-1}^j + Q_r^j) + t(r-1,r) + t(r,o) + 2.To + T_{max} - T_{wor} \right\} . A_{r-1}$$

$$q_i^j = \left\{ B \cdot \sum_{k=i}^{r} Q_k^j + \sum_{k=1}^{r} t(k,k+1) + (r-i+1)To + T_{max} - T_{wor} \right\} \cdot A_i \quad (10)$$

بعد أن تنتظر العربة زمنا T_s' فى بداية الفترة التالية ، فاننا سنجد أن :

الكمية الكلية التى سيتم جمعها عند مصدر الانتاج الأول هى :

$$Q_1^j = q_1^j + \left\{ T_s' + t(o,1) \right\} \cdot A_1$$

الكمية الكلية التى سيتم جمعها عند مصدر الانتاج الثانى هى :

$$Q_2^j = q_2^j + \left\{ T_s' + t(o,1) + B \cdot Q_1^j + t(1,2) + To \right\} \cdot A_2$$

$$= q_2^j + \left\{ T_s' + t(o,1) + t(1,2) + To + B \cdot q_1^j + A_1 \cdot B(T_s' + t(o,1)) \right\} \cdot A_2$$

وهكذا بالنسبة لباقى الكميات الكلية عند مصادر الانتاج المختلفة الموجودة على المسار P^j

بحيث تكون مجموع هذه الكميات تساوى أقصى سعة (حمولة) للعربة C . أى أن :

$$C = Q_1^j + Q_2^j + \ldots\ldots + Q_r^j$$

ومنها نجد أن :-

$$T_s' = \left[C - \sum_{i=1}^{r} q_i^j - \sum_{i=2}^{r} t(i-1,i) \left\{ I \right\} - To \left\{ J \right\} - \sum_{i=2}^{r} \left\{ k \right\} \right] / \left\{ L \right\} - t(o,1) \quad (11)$$

حيث

$$\left\{ I \right\} = \sum_{k=i}^{r} A_k + B \sum_{k=i}^{r-1} \sum_{\ell=k+1}^{r} A_k A_\ell + B^2 \sum_{k=i}^{r-2} \sum_{\ell=k+1}^{r-1} \sum_{m=\ell+1}^{r} A_k A_\ell A_m + \ldots\ldots$$

$$\{J\} = \sum_{k=2}^{r} (k-1)A_k + B \sum_{k=2}^{r-1} \sum_{\ell=k+1}^{r} (k-1)A_k A_\ell + B^2 \sum_{k=2}^{r-2} \sum_{\ell=k+1}^{r-1} \sum_{m=\ell+1}^{r} (k-1) A_k A_\ell A_m + \ldots\ldots\ldots$$

$$\{K\} = q^{j}_{(i-1)} \left\{ B. \sum_{k=i}^{r} A_k + B^2 \sum_{k=i}^{r-1} \sum_{\ell=k+1}^{r} A_k A_\ell + B^3 \sum_{k=i}^{r-2} \sum_{\ell=k+1}^{r-1} \sum_{m=\ell+1}^{r} A_k A_\ell A_m + \ldots\ldots\ldots \right\}$$

$$\{L\} = \sum_{i=1}^{r} A_i + B \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\ell=k+1}^{r} A_k A_\ell + B^2 \sum_{k=1}^{r-2} \sum_{\ell=k+1}^{r-1} \sum_{m=\ell+1}^{r} A_k A_\ell A_m + \ldots$$

مثـــــــــــــال :ـ

بافتراض البيانات التاليـــــــــة :ـ

عدد الفترات	=	3
T_{max}	=	540 min
B	=	0.2 min/Kg.
C	=	30 Kgs

سافة بين كـــــل مصدر والمصادر الاخرى بمافيها مركز التجميع تعطى بالجدول التالى :

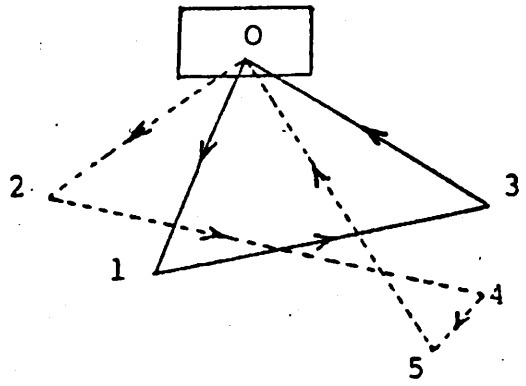
سرعة الانتشا A	الكمية الابتدائية	المسافة عن مركز التجميع					
0.06	15.46	26	1				
0.04	4.8	30	15	2			
0.03	10.41	38	51	58	3		
0.04	6.43	43	50	25	12	4	
0.06	10.22	45	60	32	19	7	5

لسهولة ، سنفترض أن : ـ

تكلفة الذهاب من المصدر x الى المصدر y = $d(x,y) = t(x,y)$

مجموعة المسارات ذات أقل تكلفة والتى تحقق الشروط الموضوعة هى : ـ

$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 0$ ، $0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 0$



فيما يلى سنحسب قيم T_s أو T'_s لكل مسار واللازمة كى تعود العربة الى مركز التجميع بأقصى حمولتها .

في الفترة الأولى : ـ

١ ـ المسار الأول :

$$P^1 : \quad 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 0$$

$$Q^1_* = C = 30 \text{ Kgs}$$

$$T^1 = t(0,1)+t(1,3)+t(3,0)+B.Q^1_* = 121 \text{ Min}$$

$$T_s = \frac{Q^1_*}{A_1+A_3} - T^1 = \frac{30}{0.09} - 121 = 212.33 \text{ Min} \quad \text{(من المعادلة 8)}$$

$$T'_s = \left[30-(15.46+10.41)-51x0.03-15.46(0.2x0.03)\right] / (0.09+0.2x0.0018)-26 = 1.7472 \text{ Min} \quad \text{(من المعادلة 11)}$$

تحقيـــــــــــق :

$$Q^1_1 = 15.46+(T'_s+t(0,1))\ A_1 = 17.124832 \text{ Kgs}$$

$$Q^1_3 = 10.41+(T'_s+t(0,1)+B.Q^1_1+t(1,3)) \cdot A_3 = 12.875165 \text{ Kgs}$$

$$Q^1_* = Q^1_1 + Q^1_3 = 29.999997 \text{ Kgs}$$

بعد فترة عمل تدرهـــــــــا

$$T_{wor} = T'_s + T^1 = 122.75 \text{ Min}$$

فان الكمية الكلية التى يمكن تجميعها على المسار P^1 تساوى

$$Q^1_* = C = 30 \quad Kgs$$

يمكن للعربة عمل دورة أخرى على نفس المسار P^1 ، اذا كان :

$$T_{max} - T_{wor} \geqslant T_s + T^1$$

$$540-122.75=417.25 \; > \; (212.33+121) = 333.33$$

بعد الدورة الثانية للعربة على نفس المسار P^1 فان :

$$T_{wor} = T_{wor} + T_s + T^1 = 456.08 \text{ Min}$$

$$Q^1_* = Q^1_* + 30 = 60 \text{ Kgs}$$

$$T_{max} - T_{wor} = 540 - 456.08 = 83.92 \; < \; T_s + T^1$$

بعد الدورة الثانية للعربة فان الزمن المتبقى $(T_{max} - T_{wor})$ لن يكون كافيا لعمل دورة ثالثة . ومع ذلك فان المصادر الموجودة على المسار ستستمر فى الانتاج حتى نهاية الفترة .

الكمية التى سيتم انتاجها عند المصدر 1 خلال الزمن المتبقى هى :

$$q^1_1 = \left\{ B.(Q^1_1 + Q^1_3) + t(1,3) + t(3,C) + T_{max} - T_{wor} \right\} . A_1$$

$$= 10.7352 \text{ Kgs}$$

والكمية التى سيتم انتاجها عند المصدر 3 خلال الزمن المتبقى هى

$$q^1_3 = \left\{ B.Q^1_3 + t(3,C) + T_{max} - T_{wor} \right\} . A_3$$

$$= \left\{ 0.2\, Q^1_3 + 38 + 83.92 \right\} \times 0.03$$

حيـــــــث :

$$Q_3^1 = (T^1 + T_s)\ A_3 = 9.9999 \quad Kgs$$

وعكـــــــــون :

$$q_3^1 = 3.7176 \quad Kgs$$

q_3^1 ، q_1^1 تمثل الكميات الابتدائية التى ستكون عند المصدريـــــن 3,1 على الترتيب فى بداية الفترة الثانيـــــــة .

٢ ـ المسار الثانـــــى

P^2 : 0 → 2 → 4 → 5 → 0

$T^2 = 113$ Min ; $T_s = 101.29$ Min ; $T_s' = 8.54$ Min

تحقيـــــــق :ـ

$$Q_2^2 = 4.8 + (T_s' + t(0,2))\ A_2 = 6.31460 \quad Kgs$$

$$Q_4^2 = 6.43 + (T_s' + t(0,2) + t(2,4) + B.\ Q_2^2)\ .\ A_4 = 9.02233$$

$$Q_5^2 = 10.22 + (T_s' + t(0,2) + t(2,4) + t(4,5) + B\ (Q_2^2 + Q_4^2))\ A_5$$

$$= 14.63677 \quad Kgs$$

$$Q_*^2 = Q_2^2 + Q_4^2 + Q_5^2 = 30.00070 \quad Kgs$$

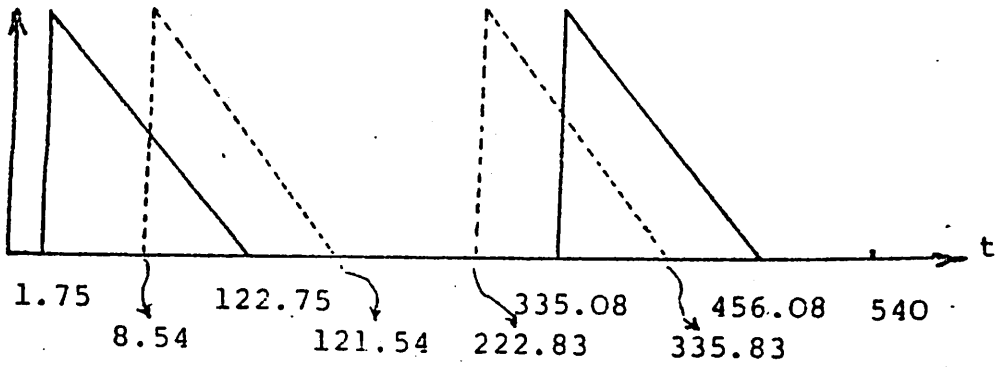
بعد أول دورة للتجميع فـــــــــــان : ـ

$$Q^{2}_{*} = 30 \text{ Kgs} \quad , \quad T_{wor} = T_{s}' + T^{2} = 121.54 \text{ Min.}$$

بعد ثانى دورة للتجميع تكـــــــــــون : ـ

$$Q^{2}_{*} = Q^{2}_{*} + 30 = 60 \text{ Kgs} \quad , \quad T_{wor} = T_{wor} + T_{s} + T^{2} = 335.83 \text{ Min}$$

$$T_{max} - T_{wor} = 540 - 335.83 = 204.17 < T_{s} + T^{2}$$

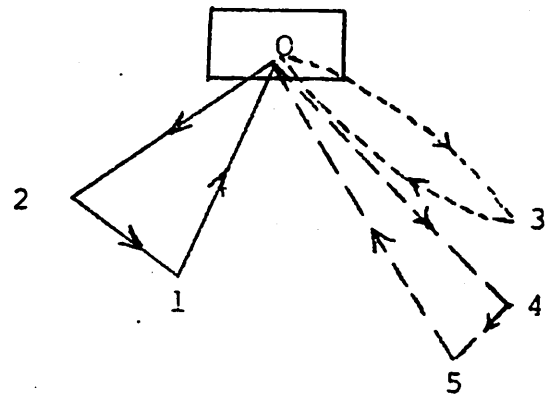


والكميات الابتدائية عند المصادر التى تقع على هذا المسار فى بداية الفترة الثانية تكون : ـ

$$q^{2}_{2} = 11.487 \quad , \quad q^{2}_{4} = 10.4186 \quad , \quad q^{2}_{5} = 15.105$$

المسارات* التى يلزم للعربات أن تسير عليها خلال هذه الفترة ، بافتراض أن الكميات المنتجة خلال الزمن المتبقى من الفترة الاولى تمثل كميات ابتدائية فى بداية الفترة الثانية هى :

P^{1} : O → 2 → 1 → O P^{2} : O → 3 → O P^{3} : O → 4 → 5 → O



* بافتراض أن المسارات تتغير فى بداية كل فترة زمنية وفقا للكميات الابتدائية عند المصادر المختلفة .

الفترة الثانيـــــــــــــة

المسار الأول : $P^1 : O \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow O$

$T^1 = 77$ Min., $T_s = 223$ Min., $T'_s = 37.08$ Min.

وبعد أول دورة تجميع فـــــــان :

$Q^1_* = 30$ Kgs , $T_{wor} = T'_s + T^1 = 114.08$ Min.

بعد ثاني دورة تجميع فـــــــان :

$Q^1_* = Q^1_* + 30 = 60$ Kgs , $T_{wor} = T_{wor} + T_s + T^1 = 414.08$ Min.

$T_{max} - T_{wor} = 125.92$ Min $< T_s + T^1$

$q^1_2 = 6.917$ Kgs , $q^1_1 = 9.331$ Kgs

المسار الثانـــــــى : $P^2 : O \longrightarrow 3 \longrightarrow O$

$T^2 = 82$ Min , $T_s = 918$ Min , $T'_s = 838.08$ Min

يلاحظ هنا أن العربة لايمكنها القيام بعمل أى دورات تجميع على هذا المسار طيلـــــــــة هذه الفترة لأن T'_s أكبر من T_{max}.

$q^2_3 = 3.7176 + 540 \times 0.03 = 19.9176$ Kgs.

المسار الثالـــــث : $P^3 : 0 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 0$

$T^3 = 101$ Min ; $T_s = 199$ Min ; $T'_s = -3.87$ Min

بعد أول دورة تجميع فـــــــان :

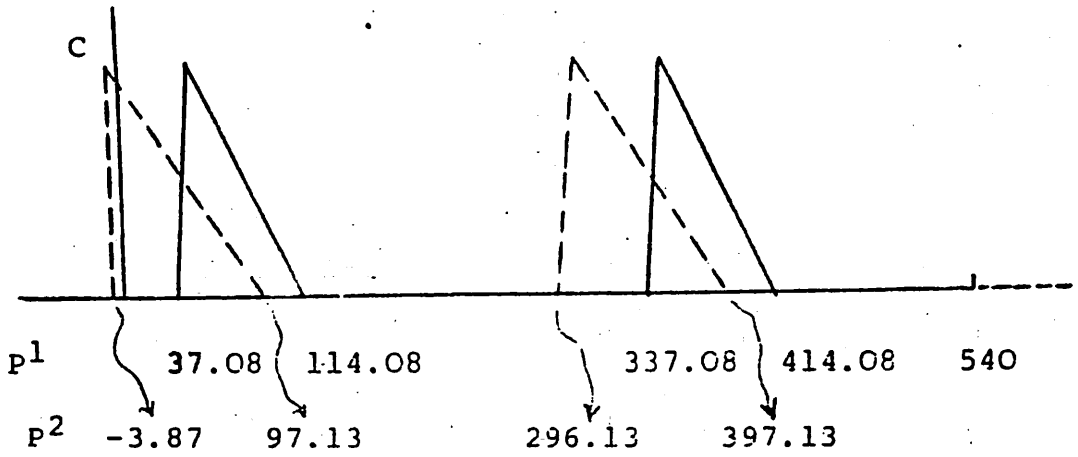
$Q^{*3} = 30$ Kgs , $T_{wor} = T'_s + T^3 = 97.13$ Min

بعد ثانى دورة تجميع فـــــــان :

$Q^{*3} = 60$ Kgs , $T_{wor} = T_{wor} + T_s + T^3 = 397.13$ Min

$T_{max} - T_{wor} = 142.87 < T_s + T^3$

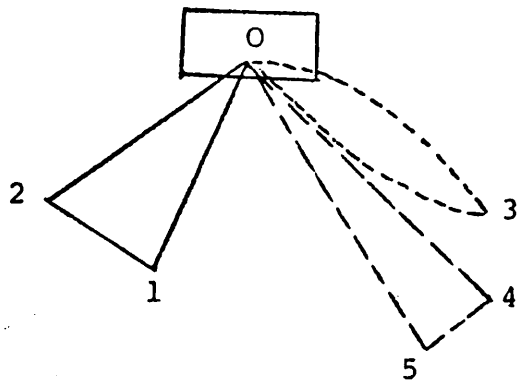
$q^3_4 = 8.035$ Kgs ; $q^3_5 = 11.488$ Kgs



وباعتبار الكميات الابتدائية q^1_1 , q^1_2 , q^2_3 , q^3_4 , q^3_5 فان المسارات

فى الفترة الثالثة هى كالتالـــــــى :

$P^1 : 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ $P^2 : 0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ $P^3 : 0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$



الفترة الثالثـــــــة :

المسار الاول : $P^1 : 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

$T^1 = 77$ Min , $T_s = 223$ Min , $T'_s = 97.08$ Min .

بعد دورة التجميع الاولى على هذا المسار يكـــــــون :

$Q^1_* = 30$ Kgs , $T_{wor} = T'_s + T^1 = 174.08$ Min

بعد ثانى دورة تجميع يكـــــــــون :

$Q^1_* = Q^{1+}_* 30 = 60$ Kgs , $T_{wor} = T_{wor} + T_s + T^1 = 474.08$ Min

$T_{max} - T_{wor} = 65.92 < T_s + T^1$

$q^1_2 = 4.517$ Kgs , $q^1_1 = 5.731$ Kgs

المسار الثانـــــــي :

$$P^2 = 0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 0$$

$T^2 = 82$ Min , $T_s = 918$ Min , $T_s = 298.08$ Min

بعد دورة التجميع الاولى فـــــــان :

$Q^2_* = 30$ Kgs , $T_{wor} = T'_s + T^2 = 380.08$ Min

$T_{max} - T_{wor} = 159.92 < T_s + T^2$

$q^2_3 = 6.1176$ Kgs

المسار الثالـــــث :

$$P^3 : 0 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 0$$

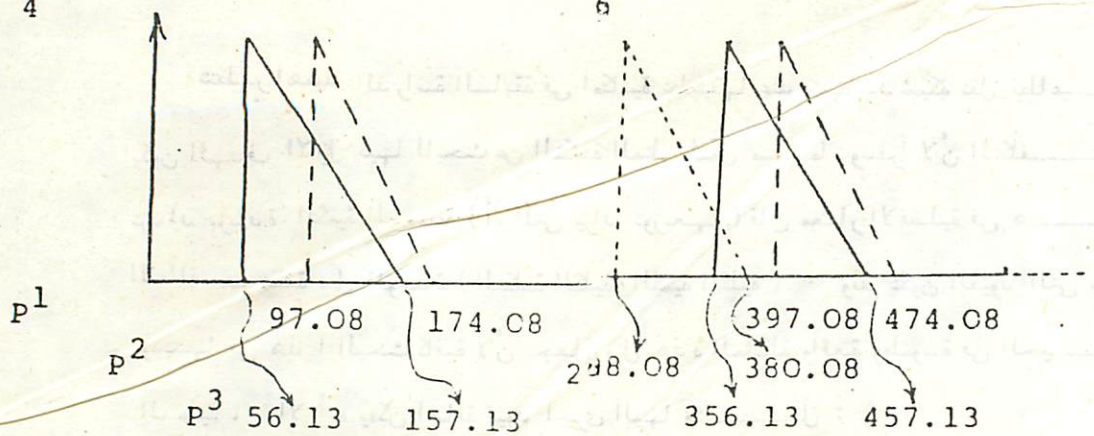
$T^3 = 101$ Min ; $T_s = 199$ Min ; $T_s = 56.13$ Min.

عدد الدورات التى يمكن أن تعملها العربة على هذا المسار وخلال هذه الفترة = ٢

$Q^3_* = 60$ Kgs , $T_{wor} = 457.13$ Min

$T_{max} - T_{wor} = 82.87$ $T_s + T^3$

$q_4^3 = 5.635$ Kgs ; $q_6^3 = 7.888$ Kgs



خلال الزمن المتبقى $(T_{max} - T_{wor})$ فان مصادر الانتاج ستستمر فى عملية الانتاج بنفس معدلاتها . وفى بداية الدورة الرابعة فان هذه المصادر تتوقف عن الانتاج $(A_i = 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,r)$ وتتبقى تعيين المسارات التى سيتم عليها تجميع الكميات التى انتجت فى خلال الزمن المتبقى من الدورة السابقة . هذه الكميات هى :

$q_1^1 = 5.73$, $q_2^1 = 4.52$, $q_3^2 = 6.12$, $q_4^3 = 5.63$, $q_5^3 = 7.89$

وباعتبار الكميات السابقة كميات ابتدائية عند المصادر المختلفة ، سنجد أن المسار الذى يمكن أن يتم عملية تجميع هذه الكميات ويحقق القيود المختلفة للمشكلة هو :

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$$

ولهذا فاننا سنجد أن :

الكمية الكلية المجمعة خلال الدورات الاربع = ٤١٩٫٨٩

التكاليف الكلية لعملية التجميع = ١٣١٤

وتكلفة تجميع الوحدة = ٣٫١٢٩٤

الخلاصـــــــــــة :

تتظهر اهمية الدراسة السابقة فى امكانية تطبيقها عند تخطيط شبكة نقل قطاعيـــــة يكون الهدف الاول فيها البحث عن التكلفة المثلى لنقل منتج ما ونظرا لأن التكلفـــــــة تزداد بزيادة الكمية المجمعة (أو التى يراد توزيعها) فان معيار الافضلية فى هـــــذه الحالة هو تكلفة نقل الوحدة (التكلفة الكلية/ الكمية الكلية) . وقد تكون القيود التى يـــتم وضعها فى هذا البحث كافية لأن تجعل مثل هذه المشكلة واقعة وملموسة فى الحيـــــاة العملية ، الا أنه يمكن اضافة قيود اخرى اليها مثـــــل :

- افتراض أن هناك أكثر من مركز للتجميع أو التوزيع فى القطاع ،
- ان العربات ذات سعات مختلفة ،
- أن دالة التكلفة قد لاتكون خطية .

وقد تم عمل برنامج للحاسب الالى وأمكن تطبيقه فى قطاع مكون من ٣٤ مصـــــــدرا للانتاج بافتراض سرعات انتاج ثابتة أو متغيرة لهذه المصادر ، وامكن به حل هذه المشكلـــة فى الحالات الاتية :ـ

- أن الكميات المنتجة عند المصادر تستطيع أن تنتظر أولا تنتظر الى الفترة التالية ،
- أن خطوط السير للعربات طوال فترة الدراسة ، تكون ثابتة أو متغيرة .

جامعة القاهرة

معهد الدراسات والبحوث الاحصائية

المؤتمر السنوى السادس عشر للاحصاء وعلوم الحاسب وبحوث العمليات والرياضيات وتطبيقاتها

١٤ - ١٧ ديسمبر ١٩٨١

مجلد رقم (٤)

بحوث العمليات

ديسمبر ١٩٨١

مطبعة جامعة القاهرة

المجلد رقـــم (٤)
بحوث العمليـــات

صفحـــة

د . حسن محمد فهمى ، محمد صادق ماجد " بعض تطبيقات بحوث العمليات في احدى منشآت صناعة الورق العربية " . ١

د . محمد يحيى عبد الرحمـن " طريقة لحل مشكلة التجميع (أو التوزيع) ذات الصفة التكراريـــة " ٣٧

مطبعة معهد التخطيط القومى