الجمهورية العربية المتحدة

التخطيط القومي

معهد التخطيط القومي

واحدة فقط

(مذكرة رقم ٣٥١)

البرامج الخطية

Linear Programming

الجزء الاول

دكتور أحمد سرور محمد
(٣٠ يونيه ١٩٦٣)

القاهرة
٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

البرامج الخطيـة

Linear Programming

تعتبر هذه الطريقة من أحسن الطرق أو الأدوات المستخدمة لحل بعض المشاكل التى تعتمد على التخطيط المستقيم ، الا أنها لا تستخدم الا اذا توفرت الشروط الآتية فى المشكلة :

١ ـ أوجه نشاط Alternative Activities

٢ ـ قيـود Restrictions

٣ ـ هـدف Objective

١ ـ أوجه النشاط :

المقصود بأوجه النشاط أن توجد عدة طرق يمكن استخدامها لنشاط معين مثلا النقل بالسكة الحديد أو السيارات أو بالطائرات أو النقل المائى فاذا لم يوجد أكثر من بديل لم توجد مشكلة .

ولا بد أن تكون أوجه النشاط هذه مرتبطة ، ولا بد أن تكون ذات صفة مستقيمة * : مثـلا تكون التكلفة ثابتة لا تتغير بزيادة الانتاج أو نقصه أو ثمن البيع ثابت أو ما الى ذلك .

٢ ـ القيـود :

يوجد نوعان من القيـود :

أ ـ قيود مباشرة وتكون على وجه النشاط نفسه ، مثلا عدم امكان بيع عدد من الوحدات يتجـاوز ١٠٠٠ وحدة .

ب ـ قيود غير مباشرة تكون نتيجة لارتباط أوجه النشاط ، مادة خام تستخدم لسلعتين أو رأس المال يستخدم لشراء سلعتين ، سلعتان تباعان لنفس المستهلك بلمونت وبوستن .

٣ ـ الهـدف :

ويحدد قبل حل المشكلة ويكون على صورتين :

أ ـ زيادة الأربـاح Meximization of profit

ب ـ خفض التكاليف Minimization of costs

---

* فى بعض الأحيان يمكن بشىء من التفكير تحويل المتغيرات ذات الصفة غير المستقيمة الى متغيرات ذات صفة مستقيمة .

أى أن الغرض سيكون زيادة المنفعة ما أمكن أو خفض الضرر ما أمكن على أنه يلزم تحليل كل مشكلة قبل حلها وذلك على النحو الموضح بالمثال التالى :

مثال عن التخطيط المستقيم :

يصنع تاجر سلعتين ا ، ب والمطلوب تحديد العدد الأمثل الذى يصنعه من كل سلعة ليحقق أكبر ربح بمعلومية :

البيـــــــان	السلعة أ	السلعة ب
الحد الأعلى للطلب (بالوحدة)	٤٠٠٠	٦٠٠٠
كمية المواد الخام التى تدخل فى كل وحدة منتجة بالرطل من نوع معين .	١	$\frac{٢}{٣}$
الربح فى كل وحدة بالجنيهات	٤	٣
كمية المواد الخام الموجودة بالرطل من هذا النوع	(٦٠٠٠) رطل	

هذه المشكلة يمكن حلها بالتخطيط المستقيم :

* حيث توجد أوجه نشاط : صنع السلعة أ

أو " " ب

أو " " أ ، السلعة ب

* وهذه البدائل ذات صفة مستقيمة .

* وتوجد قيود مباشرة : الحد الأعلى للطلب ٤٠٠٠ ، ٦٠٠٠ وحدة

* ويوجد قيد غير مباشر وهو كمية المواد الخام فى حدود ٦٠٠٠ رطل للسلعتين .

* يوجد هدف هو الربح وله صفة مستقيمة لأنه ثابت .

ويمكن أن يتم الحل بطريقتين :

١ ــ طريقة الرسم البيانى

٢ ــ طريقة الـ Simplex method باستخدام الجداول المتتابعة .

طريقة الحل بالرسم البيانى :

يلزم أولا تحليل المشكلة ووضع البيانات الواردة بها فى صورة متباينات أو معادلات واضحة المعالم على النحو التالى :

فالمعلومات التى لدينا تنص على أنه لا يصح صنع أكثر من ٤٠٠٠ سلعة من أ أو ٦٠٠٠ سلعة من ب ويمكن التعبير عن ذلك على النحو التالى :

يجب أن تكون الكمية المصنوعة من السلعة أ أقل من أو يساوى ٤٠٠٠ وحدة

" " " " " ب " ٦٠٠٠ "

(ومن المعلوم أن الرمز $\leqslant$ يعطى المعنى المقصود من الكلمات أقل من أن يساوى)

ويمكن أن نرمز للكمية المصنوعة من السلعة أ بالرمز س ١

ونرمز للكمية المصنوعة من السلعة ب بالرمز س ٢

وبذلك يمكن وضع المعلومات السابقة فى صورة متباينة على النحو التالى :

١ - س ١ $\leqslant$ ٤٠٠٠

٢ - س ٢ $\leqslant$ ٦٠٠٠

ولما كانت كمية المواد الخام الداخلة فى جميع وحدات السلعة أ + كمية المواد الخام الداخلة فى جميع الوحدات من السلعة ب لا بد أن يكون أقل من أ ويساوى ٦٠٠٠ فيمكن التعبير عن ذلك فى صورة متباينة كما يلى :

س ١ × كمية المواد الخام للوحدة + س ٢ × كمية المواد الخام للوحدة $\leqslant$ ٦٠٠٠

أى أن

٣ - س ١ + $\frac{٢}{٣}$ س ٢ $\leqslant$ ٦٠٠٠

وتكون معادلة الربح الكلى

٤ - الربح الكلى = ٤ س ١ + ٣ س ٢ أكبر ما يمكن

وبذلك نحصل على ثلاثة متباينات ومعادلة الربح ونحاول أن نرسم تلك المتباينات فى رسم بيانى على النحو التالى :

١ ــ نرسم على ورق رسم بيانى مربعات احداثيين احدهما يمثل الكمية المشتراة من السلعة أ أى $س_1$ والآخر يمثل $س_2$ كما هو موضح (بالشكل رقم ١) حيث يمثل الاحداثى الرأسى $س_1$ والاحداثى الأفقى يمثل $س_2$ ٠

٢ ــ نرسم الخط الذى يمثل $س_1$ = ٤٠٠٠

أى أن أى نقطة على هذا الخط تكون فيها قيمة $س_1$ = ٤٠٠٠ وحدة وأن أى نقطة تحت هذا الخط ومحصورة بينه وبين الاحداثى الافقى تكون فيها قيمة $س_1$ أقل من ٤٠٠٠ وحدة ٠

٣ ــ نرسم الخط الذى يمثل $س_2$ = ٦٠٠٠

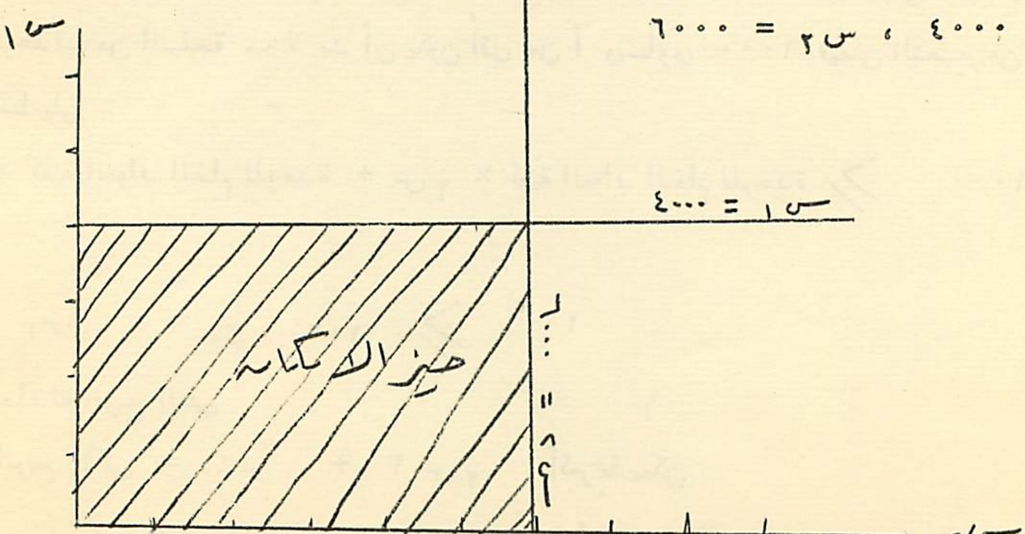
أى أن أى نقطة على هذا الخط تكون فيها قيمة $س_2$ = ٦٠٠٠

وأن أى نقطة على يسار هذا الخط (أى ناحية نقطة الأصل) ومحصورة بينه وبين الاحداثى الرأسى تكون فيها $س_2$ أقل من ٦٠٠٠

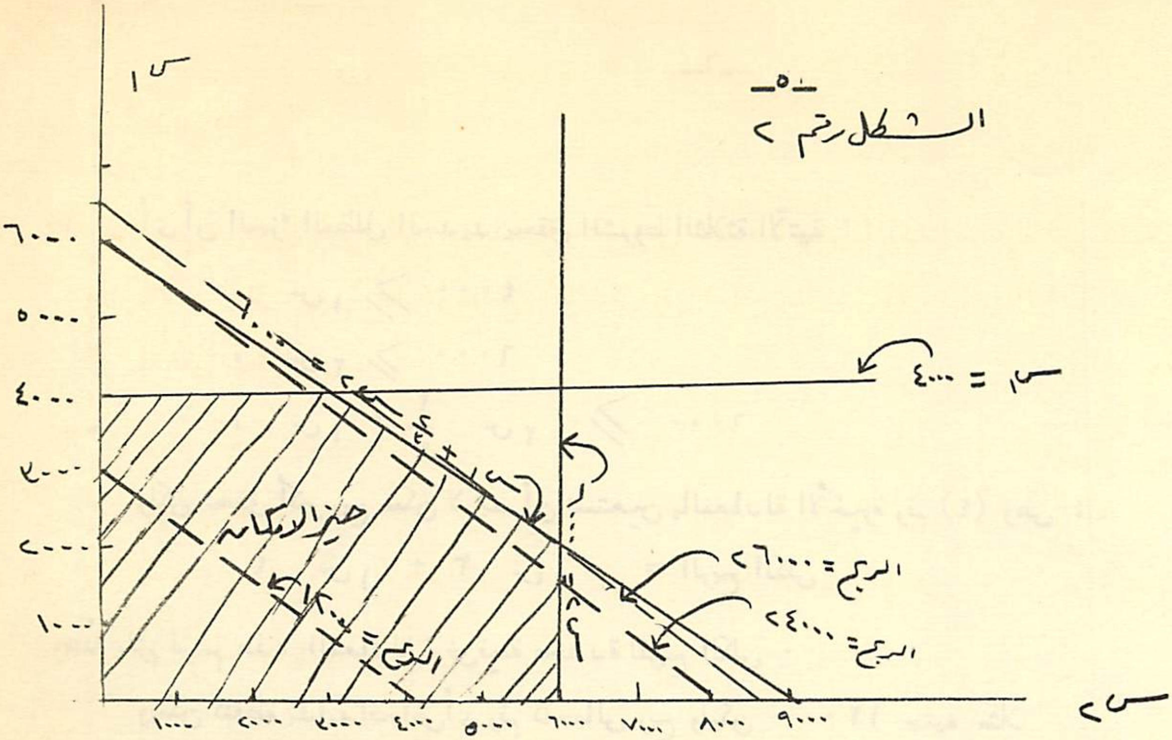
٤ ــ يسمى الشكل المستطيل (المظلل فى شكل رقم ١) حيز الامكان وكل نقطة فيه تحقق المتباينتين $س_1 \leq$ ٤٠٠٠ ، $س_2 \leq$ ٦٠٠٠ أى أن أى نقطة داخل هذا الشكل تكون فيها قيمة $س_1$ أقل من أ ويساوى ٤٠٠٠ وحدة فى نفس الوقت تكون فيها قيمة $س_2$ أقل من أ ويساوى ٦٠٠٠ وحدة ٠

أى أن حيز الامكان يحدد نطاق المتباينتين رقم (١) ، (٢) أى يحل المعادلتين معا وهما

$س_1$ = ٤٠٠٠ ، $س_2$ = ٦٠٠٠



الشكل رقم ١



٥ ـ بعد ذلك يلزم تحديد الجزء من حيز الامكان الذى يحقق فى نفس الوقت المعادلة رقم (٣) الخاصة برأس المال وهى :

$$س_{١} + \frac{٢}{٣} س_{٢} = ٦٠٠٠$$

ويتم ذلك عن طريق رسم مستقيم على نفس الشكل يمثل هذه المعادلة ٠

ولما كان أى مستقيم يحدده نقطتان يمكن تحديدهما بالتعويض فى المعادلة السابقة بفرض

$س_{١}$ = صفر فتكون $س_{٢}$ = ٩٠٠٠

ومرة أخرى بفرض $س_{٢}$ = صفر فتكون $س_{١}$ = ٦٠٠٠

ونرسم على الشكل النقطتين (٠ ، ٩٠٠٠) ، (٦٠٠٠ ، ٠) الشكل رقم (٢)

أى أن الجزء المظلل الجديد يحقق الشروط الثلاثة الآتية :

$$س_{١} \leqslant ٤٠٠٠$$

$$، \quad س_{٢} \leqslant ٦٠٠٠$$

$$، \quad س_{١} + \frac{٢}{٣} س_{٢} \leqslant ٦٠٠٠$$

ولكى نحقق أكبر ربح ممكن لا بد أن نستعين بالمعادلة الأخيرة رقم (٤) وهى :

$$٤ \; س_{١} + ٣ \; س_{٢} = \text{الربح الكلى}$$

وهنا يلزم لرسم هذه المعادلة فرض قيمة محددة للربح الكلى .

ويمكن كنقطة بداية افتراض أى رقم كاجمالى ربح وليكن ١٢٠٠٠ جنيه مثلا

فتكون المعادلة : $٤ \; س_{١} + ٣ \; س_{٢} = ١٢٠٠٠$

وهذه المعادلة يمكن رسمها على الرسم بالتعويض مرة عن $س_{١}$ = صفر

فتكون $س_{٢}$ = ٤٠٠٠ ومرة أخرى $س_{٢}$ = صفر فتكون $س_{١}$ = ٣٠٠٠

فنرسم على الشكل المستقيم الذى تحدده النقطتان (صفر ، ٤٠٠٠) ، (٣٠٠٠ ، صفر) وهو المستقيم (ـــ ٠ ـــ ٠ ـــ ٠ ـــ) بالشكل رقم (٢)

فنجد أن هذا المستقيم يدخل فى حيز الامكان فنفترض قيمة أكبر من الربح ونعوض فى المعادلة ونرسم المستقيم الجديد .

فاذا افترضنا الربح هذه المرة ٢٤٠٠٠ جنيه كانت المعادلة .

$٤ \; س_{١} + ٣ \; س_{٢} = ٢٤٠٠٠$ وتكون النقطتان (صفر ، ٨٠٠٠) ، (٦٠٠٠ ، صفر) ويكون المستقيم (ـ ٠٠ ـ ٠٠ ـ ٠٠ ـ) والذى يمثل هذه المعادلة على الرسم ومنه يتضح أيضا أنه لا زال جزء منه يدخل فى حيز الامكان أى أن أى نقطة على هذا الجزء من المستقيم الذى يدخل فى حيز الامكان يحقق المعادلات الأربعة ونستمر هكذا فى رسم المستقيمات التى تحقق معادلات الربح هذه وفى كل مرة نجد أن المستقيم الجديد يوازى المستقيم السابق له مبتعدا عن نقطة الأصل * حتى نصل الى مستقيم يكاد لا يخرج عن خط معادلة رأس المال وهى $س_{١} + \frac{٢}{٣} س_{٢} = ٦٠٠٠$ وعادة يمسه عند نقطة من

---

* نستنتج من ذلك أن مستقيمات الربح كلها متوازية وأنها تبتعد عن نقطة الأصل كلما زادت قيمة الربح .

نقط التقاطع أى فى أحد الأركان للشكل المظلل أى أننا سوف نصل الى خط مماس للشكل المظلل ٠

وقد وجد أن أقصى ربح سوف يكون ٢٦٠٠٠ جنيه حيث $س_١$ = ٢٠٠٠ $س_٢$ = ٦٠٠٠

عيوب طريقة الرسم البيانى :

١ ــ اذا زادت المتغيرات عن اثنين لا يمكن بيانها بالرسم فلا يمكن حل المشكلة الا اذا وجدت سلعتين مثلا وفى حالة وجود قيود قليلة حتى لا تتداخل الخطوط المرسومة على شكل واحد ٠

٢ ــ قد لا تتوفر الدقة الكافية فى الرسم فيؤدى أقل انحراف الى خطأ كبير فى النتائج ٠

وبذلك يلزم الأخذ بطريقة أخرى لحل المشاكل التى تزيد فيها عدد المتغيرات من متغيرين والتى توجد بها قيود كثيرة متعددة ومعقدة فى نفس الوقت ٠

The Simplex method

وتوجد هنا خطوتان رئيسيتان لحل المشكلة

١ ــ تحليل المشكلة واعدادها للحل ٠

٢ ــ حل المشكلة ٠

اعداد المشكلة للحل

أولا : وضع البيانات المتوفرة فى صورة معادلات وقد سبق أن وضعت تلك البيانات فى صورة متباينات هى :

١ ــ س ٤٠٠٠

٢ ــ س ٦٠٠٠

٣ ــ $س_١ + \frac{٢}{٣} س_٢ = ٦٠٠٠$

وذلك بالاضافة الى معادلة الربح $٤ س_١ + ٣ س_٢$ = الربح الكلى (أكبر ما يمكن)

ولا بد أولا من تحويل المتباينات الى معادلات باضافة مكملات

فاذا كان من المعلوم أن $س_١$ هى الكمية المصنوعة من السلعة أ فان المكمل يكون عبارة عن الكمية التى سوف لا يصنعها من السلعة أ أى أن :

الكمية التى تصنع من السلعة أ وهى $س_١$ + الكمية لا تصنع وهى المكمل وليكن $س_٣$ = ٤٠٠٠

$$\therefore \quad س_١ + س_٣ = ٤٠٠٠$$

وبالمثل تكون $س_٢ + س_٤ = ٦٠٠٠$ على أساس أن $س_٤$ هو المكمل

وبالتالى يكون كمية المواد الخام الداخلة فى صنع $س_١$ + كمية المواد الخام الداخلة فى صنع $س_٢$ + كمية تتبقى هى المكمل وليكن $س_٥$ كل ذلك يساوى كمية المواد الخام الموجودة وهو ٦٠٠٠

أى أن $س_١ + \frac{٢}{٣} س_٢ + س_٥ = ٦٠٠٠$

وبذلك نحصل على المعادلات الثلاثة الآتية :

$$س_١ + س_٣ = ٤٠٠٠$$

$$س_٢ + س_٤ = ٦٠٠٠$$

$$س_١ + \frac{٢}{٣} س_٢ + س_٥ = ٦٠٠٠$$

بالاضافة الى معادلة الربح الكلى = $٤ س_١ + ٣ س_٢$

حل المشكلة

أولا : العملية التنظيمية

وتتم بوضع المعادلات السابقة فى جدول على النحو التالى يسمى الجدول الأول أو جدول قبل البدء وفيه نستغنى عن الاشارات الموجبة وعلامات التساوى الموجودة بالمعادلات .

الجـــدول الأول

٤	٣	صفر	صفر	صفر			د ج
س$_1$	س$_2$	س$_3$	س$_4$	س$_5$	س صفر		
١	صفر	١	صفر	صفر	٤٠٠٠	س$_3$	صفر
صفر	١	صفر	١	صفر	٦٠٠٠	س$_4$	صفر
١	$\frac{٢}{٣}$	صفر	صفر	١	٦٠٠٠	س$_5$	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	اج	
ـ٤	ـ ٣	صفر	صفر	صفر	صفر	اح ـ د ج	

الملاحظات الخاصة بعمل الجدول :

١ ـ وضعت المتغيرات س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، س$_4$ ، س$_5$ الموجودة فى المعادلات فى الصف الثانى من الجدول ويمثل الصف الأول فى هذا الجدول معاملات المتغيرات الموجودة فى معادلة الربح وهى س$_1$ ومعاملها ٤ ، س$_2$ ومعاملها ٣ أما بقية المتغيرات وهى س$_3$ ، س$_4$ ، س$_5$ فلم تظهر أى أن معاملاتها صفر وهذه المعاملات أخذت من معادلة الربح .

٢ ـ يسمى كل عمود باسم المتغير الموجود على رأس العمود ونسمى العمود الذى يمثل الجانب الثانى من المعادلات س$_{صفر}$ حتى لا تتعارض هذه التسمية مع تسمية احد المتغيرات فمن المحتمل (فى مشكلة أخرى) وجود متغيرات س$_6$ ، س$_7$ وهكذا .

٣ ـ وضعت معاملات المعادلة الأولى س$_1$ + س$_3$ = ٤٠٠٠

فى الصف الثالث كل معامل تحت العمود الخاص به فنجد أن معامل س$_1$ يساوى ١ ومعامل س$_2$ يساوى صفر ، ومعامل س$_3$ يساوى ١ ومعامل س$_4$ ، س$_5$ هو الصفر .

وبالمثل وضعت معاملات المعادلتين س$_2$ × س$_4$ = ٦٠٠٠ ،

س$_1$ + $\frac{٢}{٣}$ س$_2$ + س$_5$ = ٦٠٠٠ على النحو الموضح بالصف الرابع والخامس من الجدول على التوالى .

٤ ــ نسمى كل صف باسم مكمل المعادلة الموجودة فيه فنسمى صف المعادلة الأولى س ١ + س ٣ = ٤٠٠٠ بالصف س ٣ وهكذا س ٤ للمعادلة الثانية) س ٥ للمعادلة الثالثة ٠

٥ ــ يضاف صفان : أ ج ، أ ج ــ د ج للمعاونة فى الحل ٠

٦ ــ حساب الصف أ ج ٠

يتكون هذا الصف من ٦ عدد قيم وتكون كل قيمة منها عبارة عن مجموع حاصل ضرب بقية القيم الموجودة فى عمود القيمة المطلوب حسابها فى القيم التي تناظرها من العمود الأخير (د ج) وبهذه الصورة تكون :

القيمة الأولى = (١ × صفر) + (صفر × صفر) + (١ × صفر) = صفر

القيمة الثانية = (صفر × صفر) + (١ × صفر) + ($\frac{٢}{٣}$ × صفر) = صفر

القيمة الثالثة = (١ × صفر) + (صفر × صفر) + (صفر × صفر) = صفر

القيمة الرابعة = (صفر × صفر) + (١ × صفر) + (صفر × صفر) = صفر

القيمة الخامسة = (صفر × صفر) + (صفر × صفر) + (١ × صفر) = صفر

القيمة السادسة = (٤٠٠٠ × صفر) + (٦٠٠٠ × صفر) + (٦٠٠٠ × صفر) = صفر

والملاحظ هنا أن قيم العمود (د ج) فى هذا الجدول كلها أصفار أى أن جميع قيم الصف (أ ج) في هذا الجدول تكون كلها أصفار نتيجة لضرب كل القيم فى أصفار ٠

٧ ــ حساب الصف الأخير (أ ج ــ د ج)

ويتم حساب كل قيمة من هذا الصنف بطرح كل قيمة من قيم صف أ ج من القيمة التى تناظرها من الصف د ج فنحصل على القيم الآتية :

ــ ٤ ، ــ ٣ ، صفر ، صفر ، صفر ، صفر

نتيجة الطرح صفر ــ ٤ ، صفر ــ ٣ ، صفر ــ صفر ، صفر ــ صفر ، صفر ــ صفر ، صفر ــ لا شيء وبذلك ننتهى من حساب جميع قيم الجدول الأول ٠

٨ - يلاحظ فى هذا الجدول أن $س_١ = ٤٠٠٠$ ، $س_٤ = ٦٠٠٠$ ، $س_٥ = ٦٠٠٠$ وهى نقطة البدء حيث لم يتم صنع أى وحدة من أ أو ب وبالتالى كان الربح الكلى يساوى صفر .

٩ - لما كان الهدف هو تحقيق أرباح فسوف نبدأ بصنع السلعة التى تحقق أكبر نسبة من الربح لتحل محل احد المكملات ، ونظرا لأن هذه الطريقة سوف تستخدم لحل مشاكل بها متغيرات كثيرة . فقد كان من الضرورى - لتعميم طريقة الحل استنباط طريقة نحدد بها السلعة التى نبدأ بها والصنف الذى تحل محله .

ولما كانت معاملات المتغيرات التى ترمز للسلع وهى $س_١$ ، $س_٢$ وضعت فى شكل أعمدة فانه يلزم وضع أحد هذه الأعمدة بدلا من أحد الصفوف

ولن نتعرض هنا لشرح الأساس الرياضى لاختيار المتغير أو العمود المنقول وتحديد الصنف الذى سوف ينقل اليه العمود ، ولكن خلاصة هذه الطريقة أن العمود المنقول هو صاحب أقل قيمة جبرية هو هنا - ٤ (- ٤ أقل من - ٣).

والصف المنقول هو صاحب أقل نسبة موجبة ونحصل على نسبة كل صف بقسمة القيم الموجودة تحت العمود $س_{صفر}$ وهى ٤٠٠٠ ، ٦٠٠٠ ، ٦٠٠٠ على القيم المناظرة لها فى العمود المنقول ، فتكون النسب :

$$\frac{٤٠٠٠}{١} = ٤٠٠٠$$

$$\frac{٦٠٠٠}{٠} = \text{(ما لا نهاية)}$$

$$\frac{٦٠٠٠}{١} = ٦٠٠٠$$

فتكون أقل نسبة هى ٤٠٠٠ وهى للصف $س_٣$

والجدول التالى يوضح العمود المنقول والصف الذى ينقل اليه العمود :
وقد اشير اليهما بالعلامة *

الجدول الأول

٤	٣	صفر	صفر	صفر			د ج
س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س صفر		
١	صفر	١	صفر	صفر	٤٠٠٠	س ٣	صفر
صفر	١	صفر	١	صفر	٦٠٠٠	س ٤	صفر
١	$\frac{٢}{٣}$	صفر	صفر	١	٦٠٠٠	س ٥	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	أ ج	
-٤	-٣	صفر	صفر	صفر	صفر	ح - د ج	

*

النسب

$\frac{٤٠٠٠}{١}$ = ٤٠٠٠ *

$\frac{٦٠٠٠}{٠}$ = مالانهاية

$\frac{٦٠٠٠}{١}$ = ٦٠٠٠

المفتاح هو الجزء المظلل وهو نقطة التقاء الصف والعمود المنقولين .

ثانيا : طريقة حساب قيم الجدول الثانى :

توجد خطوتان لحساب قيم الجدول الثانى وكل الجداول التالية له :

١ - حساب قيم الصف الجديد للجدول الجديد (وهو هنا الجدول الثانى) وذلك بقسمة كل الأرقام بالصف القديم على القيمة المشتركة بين العمود المنقول وهذا الصف وتسمى هذه القيمة (المفتاح) وتوضع كل قيمة فى المكان المناظر لها بالجدول الجديد يلاحظ أن المفتاح فى الجدول الاول = ١ أى أن قيم الصف الجديد تكون هى نفس قيم الصف القديم .

٢ - حساب باقى قيم الجدول ما عدا قيم الصف أ ج التى تحسب بالطريقة التى حسبت بها فى الجدول الأول .

وتكون كل قيمة بالجدول الجديد =

$$\text{القيمة القديمة} - \frac{\text{نقطة التلاقى بالصف المنقول} \times \text{نقطة التلاقى بالعمود المنقول}}{\text{المفتاح}}$$

٣ - يلزم حساب الصف (أ ج - د ج) بالطريقة العادية كما فى الجدول الأول لنتحقق من صحة النتائج المحسوبة حتى يمكن الاستمرار فى العمل ٠

الجـــدول الثانى

٤	٣	صفر	صفر	صفر	→		د ج
س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س صفر		↓
١	صفر	١	صفر	صفر	٤٠٠٠	س١	٤
صفر	١	صفر	١	صفر	٦٠٠٠	س٤	صفر
صفر	٢/٣	-١	صفر	١	٦٠٠٠	س٥	صفر
٤	صفر	٤	صفر	صفر	١٦٠٠٠	أ ج	
صفر	-٣	٤	صفر	صفر	١٦٠٠٠	أ ج - د ج	

* (beside the row س٥)

* (below the table)

وبالطريقة السابقة يمكن اختيار العمود والصف لعمل الجدول الثالث والمشار اليهما بالعلامة *

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - (نقطة التقاء عمود القيمة بالصف المنقول × نقطة التقاء صف القيمة مع العمود المنقول) / المفتاح

$س_{صفر}$ س٤ = ٦٠٠٠ - (٤٠٠٠) × (صفر) / ١ = ٦٠٠٠

$س_{صفر}$ س٥ = ٦٠٠٠ - (٤٠٠٠) × (صفر) / ١ = ٦٠٠٠

$س_{صفر}$ (أ ج - د ج) = صفر - (٤٠٠٠) × (-٤) / ١ = ١٦٠٠٠

س٥ س٤ = صفر − (صفر) × (صفر) / ١ = صفر

س٥ س٥ = ١ − (صفر) × (١) / ١ = ١

س٥ (أ ج − د ج) = صفر − (صفر) × (−٤) / ١ = صفر

س٤ س٤ = ١ − (صفر) × (صفر) / ١ = ١

س٤ س٥ = صفر − (صفر) × (١) / ١ = صفر

س٤ (أ ج − د ج) = صفر − (صفر) × (−٤) / ١ = صفر

س٣ س٤ = صفر − (١) × (صفر) / ١ = صفر

س٣ س٥ = صفر − (١) × (١) / ١ = −١

س (أ ج − د ج) = صفر − (١) × (−٤) / ١ = ٤

س٣ س٤ = ١ − (صفر) × (صفر) / ١ = ١

س٢ س٥ = ٢/٣ − (صفر) × (١) / ١ = ٢/٣

$$\text{س}_{٢}\,(\text{أ}_{\text{ج}} - \text{د}_{\text{ج}}) = -٣ - \frac{(\text{صفر}) \times (-٤)}{١} = -٣$$

$$\text{س}_{١}\,\text{س}_{٤} = \text{صفر} - \frac{(١) \times (\text{صفر})}{١} = \text{صفر}$$

$$\text{س}_{١}\,\text{س}_{٥} = ١ - \frac{(١) \times (١)}{١} = \text{صفر}$$

$$\text{س}_{١}\,(\text{أ}_{\text{ج}} - \text{د}_{\text{ج}}) = -٤ - \frac{(١) \times (-٤)}{١} = \text{صفر}$$

ويمكن استخدام هذه الطريقة السهلة دون الوقوع فى أى خطأ طالما أن الصف (أ ح — د ج)
يحسب فى كل مرة بالطريقتين بالحساب وبالطرح ٠

وعلى هذا النحو تكون الجداول الباقية هى :

الجدول الثالث

٤	٣	صفر	صفر	صفر			د ج
س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٠		
١	صفر	١	صفر	صفر	٤٠٠٠	س ١	٤
صفر	صفر	٣/٢	١	٣/٢	٣٠٠٠	س ٤	صفر
صفر	١	— ٣/٢	صفر	٣/٢	٣٠٠٠	س ٢	٣
٤	٣	— ½	صفر	٩/٢	٢٥٠٠٠	أ ج	
صفر	صفر	— ½	صفر	٩/٢	٢٥٠٠٠	أ ح — د ج	

*

الجدول الرابع

٤	٣	صفر	صفر	صفر			د ج
س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٠		
١	صفر	صفر	— ١/٣	١	٢٠٠٠	س ١	٤
صفر	صفر	١	١/٣	— ١	٢٠٠٠	س ٣	صفر
صفر	١	صفر	١	صفر	٦٠٠٠	س ٢	٣
٤	٣	صفر	١/٣	٤	٢٦٠٠٠	أ ج	
صفر	صفر	صفر	١/٣	٤	٢٦٠٠٠	أ ح — د ج	

ويلاحظ انه لا توجد قيم سالبة فى الصف الأخير من الجدول الرابع

وبذلك يكون أكبر ربح يمكن تحقيقه هو ٢٦٠٠٠ جنيه نتيجة صنع ~~عدد~~ ٢٠٠٠ وحدة من
السلعة أ ، ٦٠٠٠ وحدة من السلعة ب

خطوات العمل اذا كانت المشكلة تتعلق بالتكاليف :

لا تختلف طريقة العمل عن الخطوات السابقة من ناحية تسجيل أو حساب قيم الجداول الا أننا عند اختيار العمود المنقول يكون صاحب أقل قيمة جبرية موجبة وأن التكاليف تسجل مكان معادلة الربح بالسالب فاذا كانت تكاليف انتاج السلعة أ = ٤ والسلعة ب = ٣ يكون الجدول الأول على النحو التالى :

الجـــدول الأول

ـ٤	ـ٣	صفر	صفر	صفر			د ج
س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٠		
١	صفر	١	صفر	صفر	٤٠٠٠	س٣	صفر
صفر	١	صفر	١	صفر	٦٠٠٠	س٤	صفر
١	$\frac{٢}{٣}$	صفر	صفر	١	٦٠٠٠	س٥	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	أ ج	
٤	٣	صفر	صفر	صفر	صفر	أح ـ دج	

*

ثم تنقل العمود س٢ لأن ٣ أقل من ٤ جبريا

الجدول الثانـــى

ـ٤	ـ٣	صفر	صفر	صفر			د ج
س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٠		
١	صفر	١	صفر	صفر	٤٠٠٠	س٣	صفر
صفر	١	صفر	١	صفر	٦٠٠٠	س٢	ـ٣
١	صفر	صفر	$-\frac{٢}{٣}$	١	٢٠٠٠	س٥	صفو
صفر	ـ٣	صفر	ـ٣	صفر	ـ١٨٠٠٠	أ ج	
٤	صفر	صفر	ـ٣	صفر	ـ١٨٠٠٠	أح ـ دج	

*

الجدول الثالث

ـ٤	ـ٣	صفر	صفر	صفر			د ج
س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٠		
صفر	صفر	١	$\frac{٢}{٣}$	ـ١	٢٠٠٠	س٣	صفر
صفر	١	صفر	١	صفر	٦٠٠٠	س٢	ـ٣
١	صفر	صفر	ـ $\frac{٢}{٣}$	١	٢٠٠٠	س١	ـ٤
ـ٤	ـ٣	صفر	ـ $\frac{١}{٣}$	ـ٤	ـ٢٦٠٠٠	أ ج	
صفر	صفر	صفر	ـ $\frac{١}{٣}$	ـ٤	ـ٢٦٠٠٠	أح ـ دج	

ويكون هذا هو الجدول الأخير حيث لم تظهر أى قيمة موجبة بالصف الأخير (أ ح ـ د ج)

وبذلك يكون الأفضل انتاج ٢٠٠٠ عدد وحدة من السلعة أ ، ٦٠٠٠ وحدة من السلعة ب٠

ملحوظـــة :

اذا كانت المتباينات التى لدينا (أكبر من) أو فى صورة معادلة لا بد من اضافة مكمل صناعى حتى لا يظهر مكمل سالب ٠

فاذا كانت س١ ٤٠٠٠

فعند اضافة مكمل تكون س١ ـ س٣ = ٤٠٠٠

وبذلك يظهر المكمل سالبا فيلزم اضافة مكمل صناعى وليكن س٦

فتكون المعادلة : س١ ـ س٣ + س٦ = ٤٠٠٠

ولكى نتخلص من س٦ التى لا نعرف قيمتها نختار لها ربحا أو تكلفة عالية جدا بالنسبة للمتغيرات وللمكملات الأخرى ٠

وبذلك لا تدخل فى خطوات العمل فيتلاشى العمود الخاص بها ولا يبقى فى الحل الأخير ٠

وعادة نرمز لهذا الربح أو التكلفة بالرمز (ـم) وهو أكبر من أى عدد آخر يمكن أن يوجد كربح أو تكلفة ويسمى الصف فى هذه الحالة باسم المكمل الموجب ٠