UNITED ARAB REPUBLIC

THE INSTITUTE OF NATIONAL PLANNING

مذكرة داخلية رقم (٩٢)

طرق التخطيط الصناعى

اعـــداد

الدكتور وليم ميخائيل مسيحـــه

مايو ١٩٧٠

CAIRO
3, MOHAMED MAZHAR · ZAMALEK

تنقسم هذه المحاضرات الى ثلاثة اقسام : يشمل القسم الاول منها نظرية البرمجة واستخدامها فى التخطيط الشامل ، ويتناول القسم الثانى استخدامات طرق البرمجة الخطية فى حل بعض المشاكل الصناعية على مستوى الوحدة ، كمشاكل الانتاج والخلط ، والاستخدام الامثل لطاقة الآلات . بينما يتناول القسم الاخير التقدير الاحصائى لدوال الانتاج .

القسم الاول

نظرية البرمجة

يقصد بنظرية البرمجة تنسيق عدد من المتغيرات او الانشطة الاقتصادية التى تحكمها علاقات متشابكة ، وذلك فى اطار الخطة العامة للتنمية .

بدأت فكرة نظرية البرمجة فى الولايات المتحدة خلال الحرب العالمية الثانية لتخطيط بعض جوانب اقتصاديات الحرب ، وعلى وجه الخصوص مشكلة الامدادات والتموين للقوات المسلحة . فاتخاذ قرار بزيادة انتاج الدبابات او المقاتلات يستوجب بالضرورة زيادة انتاج الصلب وتوفير العدد اللازم من الفنيين والعمال المهرة . كذلك كانت هناك مشكلات تتعلق بامداد القوات المسلحة بما تحتاجه من ملابس وذخيرة ووسائل نقل ... الخ ، مع مراعاة تضافر عمليات الانتاج سويا بحيث لا تؤدى زيادة الانتاج فى احداها الى نقصه فى اخرى بطريقة غير مرغوب فيها . وبمعنى آخر ، فان القرار الاساسى يستتبعه عدد من القرارات الاخرى التى يجب ان تنفذ حتى يمكن تنفيذ القرار الرئيسى ، وبهذا نجد اننا عادة قرارات تتصل بفروع الانتاج المختلفة ، بحيث لا تتعارض هذه القرارات مع بعضها البعض .

ونظرية البرمجة تكون قطاعا هاما فى دراسة طرق الاقتصاد القياسى ، خصوصا فى المجتمعات الاشتراكية ، حيث اصبحت هذه النظرية هى الاساس لكل عمليات التخطيط . وقد ظهرت الافكار الاساسية لهذه النظرية فى الاتحاد السوفيتى فى ١٩٣٩ فى كتاب للبروفسور كانتروفيتش ، وان كانت هذه الافكار لم تلق اهتماما فى ذلك الوقت ، الا انها بدأت تحظى باهتمام الاقتصاديين والمخططين فى الفترة الاخيرة .

ويمكن تقسيم نظرية البرمجة الى قسمين رئيسين : يتناول القسم الاول منهما الاتساق الداخلى للبرامج ، بمعنى انه يجب التوفيق بين القرارات المختلفة التى تتشابك مع بعضها البعض بحيث يؤثر تنفيذ احدها على تنفيذ القرارات الاخرى . فبدون التوفيق بين القرارات المختلفة لا يمكن للبرنامج الكلى ان يتحقق . أما القسم الثانى من نظرية البرمجة فيتناول امثلية البرامج . فعموما نجد ان هناك عددا كبيرا جدا من البرامج التى تتميز بالاتساق الداخلى ، ويكون علينا ان نختار من بين هذه البرامج ما يمكن ان يوصف بانه الامثل من الناحية الاقتصادية .

وفكرة امثلية البرامج هنا فكرة نسبية تختلف بحسب ما يراه المخطط مناسبا من وجهة نظره . فاذا كان القائمون بعملية البرمجة هم مديرو احدى الشركات الكبيرة فى مجتمع راسمالى فالهدف هنا محدود تماما وهو ان يصل البرنامج بالمنشأة الى اقصى ربح ممكن . على ان معيارا كهذا للامثلية يمكن الا يكون مناسبا فى نطاق سياسة اقتصادية اشمل . فقد يكون اذن من المناسب ان يكون معيار الامثلية هو تحقيق اقصى معدل للنمو للدخل القومى ، او تحقيق اقصى عمالة ممكنة ، او قد يكون هو الحصول على اكبر عائد ممكن من الحملات الصحية الخ . وقد يكون المعيار الامثل فى عملية برمجة امداد القوات المسلحة بالغذاء هو مراعاة توفر مواصفات معينة من الناحية الغذائية والصحية للجنود باقل تكلفة ممكنة .

اولا : الاتساق الداخلى للخطة .

تحليل العلاقات المتشابكة بين الصناعات

جدول ليونيتف

يتم تحقيق الاتساق الداخلى للبرامج عن طريق ما يسمى بموازين الاقتصاد القومى التى ابتكرها الاقتصادى الامريكى ليونيتف ، والتى تكون نقطة الانطلاق لتحليل المدخلات والمخرجات ، هذا التحليل الذى كثيرا ما يسمى بتحليل العلاقات المتشابكة بين الصناعات او القطاعات المختلفة .

وتقوم فكرة تحليل المدخلات والمخرجات على اساس تكوين ميزان للاقتصاد القومى يظهر حجم الانتاج وتوزيعه على القطاعات المختلفة للاقتصاد القومى مثل قطاعات التعدين والقوى المحركة والصناعات الكيماوية والبترول ، الخ . حيث يتم هذا التقسيم حسب الحاجة وحسب طبيعة تركيب الاقتصاد واهمية القطاعات . فاذا افترضنا اننا قسمنا الاقتصاد القومى الى قطاعات عددها ن ورمزنا الى الناتج من كل قطاع فى وحدة زمنية معينة (سنة مثلا) بالرموز س١ ، س٢ ، ... ، سن وهكذا ، فان س١ سوف تعنى على سبيل المثال انتاج الفحم ، س٢ انتاج الصلب ، س٣ انتاج القوة الكهربائية ... الخ .

سنجد ان جزءا من ناتج كل قطاع يحتفظ به داخل القطاع نفسه ، كأن يستخدم جزء من ناتج القوة الكهربائية لخدمة قطاع القوة الكهربائية . ونرمز لهذا الجزء فى القطاع الاول بالرمز س١١ . بينما يتجه جزء آخر من انتاج القطاع الاول ليستخدم فى عملية الانتاج فى القطاع الثانى ، ويرمز لهذا الجزء بالرمز س١٢ ، وهكذا سترمز س١ن لذلك الجزء من الناتج فى القطاع الاول التى تذهب الى القطاع ن . وبالمثل هناك اجزاء من ناتج القطاع الثانى تذهب الى الاول والثالث والرابع وهكذا ، نرمز لها بالرموز س٢١ ، س٢٣ ، ... ، س٢ن ، بينما تبقى الكمية س٢٢ فى نفس القطاع . وعلى العموم فان سرو تمثل الجزء من ناتج القطاع النهائى الذى يذهب لكى يستخدم فى القطاع و ، سرر تمثل الجزء الذى يحتفظ به فى القطاع النهائى لضرورة الانتاج فى نفس القطاع .

وفى الحالة العامة نجد ان انتاج القطاع الرائى سرن لا يذهب كله الى القطاعات المختلفة او يحتفظ به فى القطاع نفسه ، وانما نجد انه يتبقى فى القطاع فائضا يتجه الى الاستهلاك او التصدير او ليستخدم فى تكوين مخزون . مثل هذا الفائض سنرمز له بالرمز سرص .

وهكذا نجد ان سر١ ، سر٢ ، ... ، سرن تمثل الناتج الكلى للقطاعات المختلفة ، س١ ، س٢ ، ... ، سن تمثل الناتج النهائى لهذه القطاعات ، بينما تمثل القيم سرو (حيث سرو تأخذ القيم من ١ الى ن) التدفقات بين القطاعات المختلفة . وقد يكون بعض هذه القيم مساويا للصفر ، فاذا كانت س١ن تساوى الصفر ، فان معنى هذا ان القطاع الاول لا يذهب منه اى جزء للقطاع الخامس .

جدول ١

ميزان ليونتيف للاقتصاد القومي

١	س ١١	س ٢١	.....	س ١ن
٢	س ١٢	س ٢٢	.....	س ٢ن
...	...	...		...
ن	س ن١	س ن٢	.....	س نن

والجزء الاوسط من الجدول يكون مصفوفة مربعة من الدرجة ن × ن يطلق عليها مصفوفة التدفقات بين القطاعات ، بينما يطلق على الجدول كله مصفوفة ميزان الانتاج .

والجدول السابق يمكن ان يكون بوحدات من السلع المنتجة ، كما يمكن ان يكون بوحدات نقدية . فاذا كانت ارقام الجداول بوحدات من السلع المنتجة فمن الواضح انه يمكن جمع مفردات الصفوف ، حيث انها جميعا متجانسة ، بينما لا يمكن جمع مفردات الاعمدة . اما اذا كانت ارقام الجدول بوحدات من النقود ، فانه يمكننا جمع مفردات الصفوف ومفردات الاعمدة وجمع مفردات الصفوف يمكننا ان نصوغها كما يلى :

$$\text{حيث } \text{ن} = 1، 2، \ldots، \text{ن} \qquad \text{ص}_{\text{و}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{و}} + \text{س} \qquad (1)$$

هذه المعادلات تسمى معادلات توزيع الانتاج .

وفى الغالب ما يضاف الى الجدول ١ صف اضافى على راس الجدول يمثل القوة العاملة واذا كانت الارقام فى الجدول تمثل وحدات نقدية فانه يمكن ايضا اضافة صف آخر فى ذلك الجدول يمثل ارباح القطاعات المختلفة للانتاج ، ونرمز لها بالرموز ح_1 ، ح_2 ، ... $\text{ح}_{\text{ن}}$ كذلك فان القوة العاملة يرمز لها بالرموز س ١٠ ، س ٢٠ ، ... ، س ن٠ وتكون س ن٠ هى القوة العاملة التى تستخدم فى القطاعات غير المنتجة (كقطاع الخدمات والحكومة) ، ص .

هى اجمالى القوة العاملة المستخدمة فى القطاعات المنتجة وغير المنتجة ، كما يشمل القوة العاملة الغير مستخدمة على الاطلاق .

وبكذا يمكن ان يصبح الجدول كما يلى :

جدول رقم ٢

الناتج الكلى	التدفقات بين القطاعات			الناتج النهائى
ن ٠	س ١٠	س ٢٠	س ن٠	س ٠
ن ١	س ١١	س ٢١	س ان	س ١
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ن ن	س ن١	س ن٢	س نن	س ن
	ح ١	ح ٢	ح ن	
	ن ١	ن ٢	ن ن	

حيث $ن_{ن} = \sum_{و=١}^{ن} س_{ن و} + س_{ن}$ حيث $ن$ = صفر ، ١ ، ٠٠٠ ، ن (١أ)

واذا كان الجدول بوحدات نقدية ، فانه يمكن كما قلنا جمع الوحدات فى كل عمود لنحصل على ن من المعادلات

$ن_{ن} = س_{ن} + \sum_{و=١}^{ن} س_{و ن}$ حيث $ن$ = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، ن (٢)

وتمثل $س_{ن}$ تكلفة القوة العاملة المستخدمة فى القطاع الرائى ، $\sum_{و=١}^{ن} س_{و ن}$ تمثل تكلفة وسائل الانتاج المستخدمة لانتاج القطاع الرائى ، $ن_{ن}$ اجمالى تكلفة الانتاج ، وتكون معادلة الربح هى :

$ع_{ن} = ن_{ن} - ن_{ن}$ حيث $ن$ = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، ن (٣)

ومن المعادلة (٢) التى تمثل اجمالى تكلفة الانتاج ، والمعادلة (٣) التى تمثل الربح ، نحصل على المعادلات

$$= س_{ر} + \frac{ن}{و=١} م_{وس} + ح \quad \text{حيث } ر = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، ن \qquad (٤)$$

وتسمى هذه المعادلات بمعادلات التكلفة

ومن الجدول نرى انه يمكن الحصول على $س_{ر}$ — اجمالى الناتج فى الصناعة او القطاع ر — اما بجمع مفردات الصفوف او بجمع مفردات الاعمدة . كذلك فبفحص المعادلتين (١) ، (٤) او بتحليل الجدول نرى أنه يمكننا صياغة المعادلات كما يلى :

$$\frac{ن}{و=١} م_{رو} + س_{ر} = س_{ر} + \frac{ن}{و=١} م_{وس} + ح_{ر} \qquad \cdots\cdots \qquad (٥)$$

التى يمكن كتابتها على الصورة التالية اذا حذفنا العنصر $س_{ر}$ من الطرفين :

$$\frac{ن}{و \neq ر} م_{رو} + س_{ر} = س_{ر} + \frac{ن}{و \neq ر} م_{وس} + ح_{ر} \qquad \cdots\cdots \qquad (٦)$$

(حيث ر = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، ن)

وتسمى هذه المعادلات توازن التدفقات بين القطاعات . وهى تعنى ان تدفق المنتجات من القطاع الرائى الى القطاعات الاخرى ، بالاضافة الى الناتج النهائى لهذا القطاع ، يساوى ما يتسلمه هذا القطاع من القطاعات الاخرى بالاضافة الى القوة العاملة التى تستخدم فيه والربح المحقق . وكثيرا ما نجد فى الكتابات عن هذا الموضوع انه يرمز لمجموع $س_{ر} + ح_{ر}$ بالقيمة المضافة .

معاملات الانتاج الفنيـــة

شروط الاتساق الداخلي لخطط الانتـــاج

سنتناول الآن الطريقة التي تؤثر بها شروط الانتاج الفنية في العلاقات بـــين القطاعات . ولهذا الغرض سنحدد هنا العلاقة بين الجدول ٢ الذي يعطي المدخلات والمخرجات بوحدات نقدية ، وجدول ٣ ادناه الذي يعطي المدخلات والمخرجات بوحدات كمية للسلع . في هذا الجدول حـــس ، ك س ترمزان على الترتيب للناتج الكلي والناتج النهائي للقطاع الرائي ، بينما تمثل ك س و تدفق المنتج من القطاع س الى القطاع و .

جدول ٣

جدول المدخلات والمخرجات بوحدات كمية

حـــس	ك ١٠	ك ٢٠	ك ن٠	ك ٠
حـــس ١	ك ١١	ك ٢١	ك ن١	ك ١
حـــس ٢	ك ١٢	ك ٢٢	ك ن٢	ك ٢
.....	.....	.....	.....	.....
حـــس ن	ك ن١	ك ن٢	ك نن	ك ن

فاذا اردنا ان نحدد العلاقة بين الجدول ٢ والجدول ٣ ، فانه يجـــب ان نعرف اسعار منتجات القطاعات المختلفة . فاذا رمزنا لهذه الاسعار بالرموز

ع١ ، ع٢ ، ... ، ع ن فان

س س = ك س ع س ، حـــس = حـــس ع س ، س س و = ك س و ع س

بينما تتحدد العلاقات في الجدول ٣ بالمعادلات الآتية :

$$حـــس = \text{مجـ}_{و=١} ك_{س و} + ك_{س} \quad \text{حيث س} = ١ ، ٢ ، ... ، ن \qquad (٧)$$

حيث تسمى بمعادلات توزيع الانتاج ، كما سبق .

ومن الطبيعى ان عملية الانتاج فى القطاعات المختلفة لن تكون متسقة الا اذا حافظنا على نسب معينة للمخرجات بين مختلف القطاعات ، حيث تتوقف هذه النسب على الشروط الفنية للانتاج . فاذا اردنا ان ننتج ١٠٠٠ طن من الصلب ، فمن الواضح انه يلزمنا كميات معينة من الحديد الزهر والفحم والقوة العاملة ... الخ .

لهذا فانه من الانسب ان نقدم هنا فكرة المعاملات الفنية للانتاج $أ_{مو}$ والتى تعرف كما يلى :

$$أ_{مو} = \frac{ك_{مو}}{س_و} \qquad \text{حيث } س_و = ١٠٢٠٠٠٠ ن \qquad (٨)$$

والمعامل الفنى للانتاج يحدد عدد الوحدات من المنتج من القطاع الرائى اللازمة لانتاج وحدة واحدة من المنتج فى القطاع و . فاذا كان القطاع و هو الناتج من الصلب والقطاع م هو الناتج من الفحم فان المعامل الفنى $أ_{مو}$ يمثل عدد الاطنان من الفحم اللازمة لانتاج طن واحد من الصلب . ومن الممكن افتراض ثبات قيم المعاملات الفنية للانتاج فى الاجل القصير ، حيث انه من الواضح انها تعتمد على العلاقات بين القطاعات المختلفة وعلى الشروط الفنية السائدة ، والتى لا يمكن تغييرها تغييرا كبيرا من سنة لاخرى . على انه اذا افترض ثباتها فى الاجل الطويل فقد يؤدى استخدامها فى التحليل الاقتصادى الى نتائج غير سليمة ، خصوصا فى الدول النامية التى تحدث فيها تغيرات هيكلية كبيرة فى المراحل الاولى من برامج التنمية .

واضح ان لدينا ن × ن = $ن^٢$ من المعاملات الفنية للانتاج $أ_{مو}$ ، من بينها ن معامل من الطراز $أ_{مو}$ التى تمثل كمية الناتج من القطاع م التى تلزم لانتاج وحدة واحدة فى نفس القطاع .

من تعريف المعاملات الفنية فى المعادلة (٨) نرى ان $ك_{مو} = أ_{مو} س_و$ ، وهذا يعنى ان تدفق الناتج من القطاع م الى القطاع و يساوى معامل الانتاج المناظر $أ_{مو}$ مضروبا فى الناتج الكلى للقطاع و . ومن هذه العلاقة يمكننا اعادة كتابة معادلات توزيع الانتاج (٧) بالشكل الآتى :

$$س_م = \sum_{و=١}^{ن} أ_{مو} س_و + ك_م$$

او

$$\text{حيث } ر = ١ ، ٢ ، \ldots ، ن \qquad \text{ح}_{ر} - \sum_{و=١}^{ن} \text{أ}_{ر و} \text{ ح}_{و} = \text{ك}_{ر} \qquad (٩)$$

واذا افترضنا ان المعاملات الفنية للانتاج كانت معطاة ، فان نموذج المعادلات (٩) يتكون من ن معادلة خطية فى ٢ ن من المجاهيل . هذه المجاهيل هى ح١ ، ح٢ ، ... ، ح ن ، ك١ ، ك٢ ، ... ، ك ن . فاذا اردنا حل هذا النموذج من المعادلات ، فانه يمكننا ان نفترض الآتى :

١) اننا نعرف الناتج الكلى فى القطاعات المختلفة كما حددته الخطة الاقتصادية ، ومن ثم نستطيع الحصول من المعادلات (٩) على الناتج النهائى لكل قطاع : ك١ ، ك٢ ، ... ، ك ن .

او ٢) أن الناتج النهائى لكل قطاع من المعطيات — اى ان الخطة قد حددت قيمته ، وبهذا نستطيع من المعادلات (٩) ان نحصل على النواتج الكلية ح١ ، ح٢ ، ... ، ح ن .

او ٣) ان بعض النواتج الكلية وبعض النواتج النهائية ، عددها مما ن ، تحددت قيمتها فى الخطة ، ونستطيع بهذا ان نحصل على بقية النواتج الكلية والنواتج النهائية من المعادلات (٩) .

وعلى هذا فان خطة الانتاج التى تشتمل على قطاعات عددها ن ، تكون فيها مجاهيل عددها ٢ن ، ونلجأ الى تحديد ن من هذه المجاهيل بطريقة تعسفية اما بقية المجاهيل فتحددها قيم المعاملات الفنية للانتاج . ونقول هنا ان خطة الانتاج لها درجات حرية عددها ن .

والمعادلات (٩) تمثل شروط الاتساق الداخلى للخطة — وبغير هذه الشروط لا تكون الخطة مكتملة . واذا لم تتحقق المعادلات (٩) فقد يبدو من الناحية العملية ان هناك اكثر كثيرا مما ينبغى من بعض السلع ، واقل كثيرا مما ينبغى من البعض الآخر .

مثال : نفرض ان لدينا الجدولين الآتيين للمدخلات والمخرجات بالكمية وبالقيمة لأربعة من القطاعات الصناعية :

	ك و				ك ا
٢٠٠	٢	٤٠	٢٨	٢٢	١٠٨
٣٥٠	٦٠	١٥	٢٠	٤٠	٢١٥
١٠٠	١٥	١٣	صفر	١٠	٦٢
٩٠	١٠	٤٠	١٥	٧	١٨

	س و				س
٥٠٠	٥	١٠٠	٧٠	٥٥	٢٧٠
٧٠٠	١٢٠	٣٠	٤٠	٨٠	٤٣٠
٥٠٠	٧٥	٦٥	صفر	٥٠	٣١٠
٣٦٠	٤٠	١٦٠	٦٠	٢٨	٧٢

بمقارنة هذين الجدولين نرى ان الاسعار $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$ لمنتجات القطاعات الاربعة هي على الترتيب ٢ر٠ ، ٢ر٠ ، ٥ر٠ ، ٤ر٠ وبتطبيق العلاقة (٨) نحصل على مصفوفة المعاملات الفنية :

$$\begin{bmatrix} ١٠٠ر٠ & ١٤٣ر٠ & ٢٨٠٠ر٠ & ٢٤٤٤ر٠ \\ ٣٠٠ر٠ & ٤٢٩ر٠ & ٢٠٠٠ر٠ & ٤٤٤٤ر٠ \\ ٧٥٠ر٠ & ٣٧١ر٠ & ٠٠٠٠ر٠ & ١١١١ر٠ \\ ٥٠٠ر٠ & ١٤٣ر٠ & ١٥٠٠ر٠ & ٧٧٨ر٠ \end{bmatrix}$$

حل النموذج : نفرض الآن ان الخطة قد حددت حجم الناتج النهائي $ك_ر$ في كل قطاع. وعلى اساس المعادلات (٩) نريد ان نوجد قيم النواتج الكلية $س_ر$. ونبدأ باعادة كتابة المعادلات في الصورة الآتية :

$$(١ - أ_{رر}) س_ر - \sum_{و \neq ر} أ_{رو} س_و = ك_ر \quad \text{حيث } ر = ١ ، ٢ ، \ldots ، ن \qquad (٩أ)$$

أو

$$\begin{aligned} (١ - أ_{١١}) س_١ - أ_{٢١} س_٢ - \ldots - أ_{ن١} س_ن &= ك_١ \\ - أ_{١٢} س_١ + (١ - أ_{٢٢}) س_٢ - \ldots - أ_{ن٢} س_ن &= ك_٢ \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ - أ_{ن١} س_١ - أ_{ن٢} س_٢ - \ldots + (١ - أ_{نن}) س_ن &= ك_ن \end{aligned}$$

أو اذا استخدمنا المصفوفات

$$أ \, \vec{س} = \vec{ك}$$

حيث أ هى المصفوفة المربعة من الدرجة ن :

$$\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots\cdots & أ_{ن١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots\cdots & أ_{ن٢} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ أ_{١ن} & أ_{٢ن} & \cdots\cdots & أ_{نن} \end{bmatrix}$$

ويطلق على هذه المصفوفة "المصفوفة الفنية".

كذلك $\vec{س}$ ، $\vec{ك}$ هما الموجهان من الدرجة ن :

$$\vec{س} = \begin{bmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \\ \vdots \\ س_{ن} \end{bmatrix} \quad ، \quad \vec{ك} = \begin{bmatrix} ك_{١} \\ ك_{٢} \\ \vdots \\ ك_{ن} \end{bmatrix}$$

ويمكننا اذن ان نحل المعادلات (٩ جـ) كما يلى :

$$\vec{س} = أ^{-١} \, \vec{ك} \qquad (١٠)$$

حيث $أ^{-١}$ هو مقلوب المصفوفة أ .

ويظهر من هذا الحل انه اذا حددنا فى الخطة قيم كل النواتج النهائية لقطاعات الانتاج المختلفة $\vec{ك}$ ، فانه بضرب هذه القيم فى معاملات ثابتة ، فان قيمة النواتج الكلية تزيد بنفس النسبة . وعلى هذا الاساس ، فان حلول نموذج المعادلات (٩) هى حلول متجانسة (متناسبة مع معدل الخطة) . ومن الصيغة (١٠) نجد ان :

$$\vec{س}_{و} = \text{محـ}_{و=١} \, أ^{-١} \, \vec{ك}_{و} \quad \text{حيث } و = ١ ، ٢ ، \cdots\cdots ، ن \qquad (١١)$$

$أ^{-١}_{مو}$ هو العنصر فى الصف س والعمود و من مقلوب المصفوفة أ ٠ ومن هذه الصيغة نرى ان النائج الكلى لاى قطاع هو المجموع المرجح للنواتج النهائية لكل القطاعات الاخرى بينما تعتمد الاوزان $أ^{-١}_{مو}$ على قيمة المعاملات الفنية فقط ، وتسمى $أ^{-١}_{مو}$ بمعاملات متطلبات الانتاج ٠

وفى المثال السابق نجد ان المصفوفة أ ومقلوبها $أ^{-١}$ يأخذان القيم الآتية :

$$أ = \begin{bmatrix} ١٩٠٠ر & -١٤٣ر & -١٨٠٠ر & -٤٤٤ر \\ -٣٠٠٠ر & ١٥٧١ر & -٢٠٠٠ر & -٤٤٤٤ر \\ -٧٥٠ر & -٣٧١ر & ١٠٠٠ر & -١١١١ر \\ -٥٠٠ر & -١٤٣ر & -١٥٠٠ر & ٩٢٢٢ر \end{bmatrix}$$

$$أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١٢٦٨ر & ٢٠٤٥ر & ٤٢٣٦ر & ٤٤٨٢ر \\ ٤٣٩٨ر & ١٢٠٦١ر & ٤٧٧٧ر & ٧٥٥٣ر \\ ١١٥٨ر & ٧٩٤ر & ١٧٨١ر & ١٩٨٨ر \\ ١٣٤٤ر & ١٧٣٥ر & ٢٥٧٥ر & ١٢٣٤٦ر \end{bmatrix}$$

فاذا فضنا — على سبيل المثال — بتحديد النواتج النهائية فى الخطة بالقيم التالية :

$$ك = \begin{bmatrix} ١٠٠ \\ ٢٠٠ \\ ٦٠ \\ ٢٠ \end{bmatrix}$$

فانه يمكننا باستخدام المعادلة (١٠) الحصول على النواتج الكلية :

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} ١٨٧٩٦٠٠ر \\ ٣٢٨٩٦٢٠ر \\ ٩٦١٢٢٠ر \\ ٨٨٢٨٢٠ر \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠٠ \\ ٢٠٠ \\ ٦٠ \\ ٢٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٢٦٨ر١ & ٢٠٤٥ر & ٤٢٣٦ر & ٤٤٨٢ر \\ ٤٣٩٨ر & ١٢٠٦١ر١ & ٤٧٧٧ر & ٧٥٥٣ر \\ ١١٥٨ر & ٧٩٤ر & ١٧٨١ر١ & ١٩٨٨ر \\ ١٣٤٤ر & ١٧٣٥ر & ٢٥٧٥ر & ١٢٣٤٦ر١ \end{bmatrix} = ك$$

ويجب ملاحظة ان الحل (١٠) يعتمد على افتراض ان المصفوفة أ غير صفرية المحدد ٠ اما اذا كان هذه المصفوفة صفرية المحدد ، فانه لا يمكن تحديد قيم $س_{مو}$ وانما يمكن فقط تحديد النسب $س_{مو}$ اذا كان واحد على الاقل من محيدات المصفوفة أ لا يساوى الصفر . كذلك يمكن ان نفترض قيمة تقديرية لاحد النواتج الكلية ، وبالتالى يمكن حل النموذج وتحديد قيم مزيدة لبقية النواتج الكلية ٠ ويقال هنا ان للخطة درجات حرية عددها ن + ١ ٠

وكثيرا ما يحدث فى مشكلات التخطيط الصناعى ان تكون المصفوفة الفنية أ مثلثة او شبه مثلثة . لنأخذ مثلا النموذج الآتى :

$$\text{ك}_1 = \text{أ}_{11}\text{س}_1 + \text{أ}_{21}\text{س}_2$$

$$\text{ك}_2 = \text{أ}_{12}\text{س}_1 + \text{أ}_{22}\text{س}_2$$

$$\text{ك}_3 = \text{أ}_{13}\text{س}_1 + \text{أ}_{23}\text{س}_2 + \text{أ}_{33}\text{س}_3 + \text{أ}_{43}\text{س}_4 + \text{أ}_{53}\text{س}_5$$

$$\text{ك}_4 = \text{أ}_{14}\text{س}_1 + \text{أ}_{24}\text{س}_2 + \text{أ}_{34}\text{س}_3 + \text{أ}_{44}\text{س}_4 + \text{أ}_{54}\text{س}_5$$

$$\text{ك}_5 = \text{أ}_{15}\text{س}_1 + \text{أ}_{25}\text{س}_2 + \text{أ}_{35}\text{س}_3 + \text{أ}_{45}\text{س}_4 + \text{أ}_{55}\text{س}_5$$

$$\text{ك}_6 = \text{أ}_{16}\text{س}_1 + \text{أ}_{26}\text{س}_2 + \text{أ}_{36}\text{س}_3 + \text{أ}_{46}\text{س}_4 + \text{أ}_{56}\text{س}_5 + \text{أ}_{66}\text{س}_6$$

حيث أ$_{ij}$ فى هذا المثال لا ترمز للمعامل الفنى للانتاج ، وانما العنصر فى الصف i والعمود j من المصفوفة أ ، التى تساوى

$$\text{م} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} & \text{أ}_{43} & \text{أ}_{53} & \text{صفر} \\ \text{أ}_{14} & \text{أ}_{24} & \text{أ}_{34} & \text{أ}_{44} & \text{أ}_{54} & \text{صفر} \\ \text{أ}_{15} & \text{أ}_{25} & \text{أ}_{35} & \text{أ}_{45} & \text{أ}_{55} & \text{صفر} \\ \text{أ}_{16} & \text{أ}_{26} & \text{أ}_{36} & \text{أ}_{46} & \text{أ}_{56} & \text{أ}_{66} \end{bmatrix}$$

فى هذه الحالة نجد ان قيمة س$_1$ ، س$_2$ تتوقف فقط على المعاملات فى المعادلتين الاولى والثانية ، فهاتان المعادلتان مستقلتان عن بقية معادلات النموذج . وبايجاد قيمة كل من س$_1$ ، س$_2$ يمكن التعويض بقيمتيهما فى المعادلات التالية وايجاد س$_3$ ، س$_4$ ، س$_5$ ، ثم أخيرا التعويض بقيم كل هذه المتغيرات فى المعادلة الاخيرة للحصول على س$_6$.

أى انه يمكن فى هذه الحالة تجزئة النموذج الاصلى الى عدة نماذج فرعية ، يكون الاول منها مستقلا تماما عن كل النماذج الاخرى ، ويسمى هذا النموذج بنواة الخطة . ويكون النموذج الثانى متوقفاً على الاول بينما يكون مستقلاً عن الثالث والرابع ، وهكذا ، يبنى كل نموذج على ماسبقه من نماذج حتى تتكون الخطة العامة .

ويمكن تفسير معاملات متطلبات الانتاج $أ^{-١}_{هو}$ على النحو الآتى : نفرض اننا زدنا الناتج النهائى للقطاع هـ بوحدة واحدة ، فان الناتج الكلى للقطاع س يزيد بمقدار $أ^{-١}_{هـ هـ}$. فالمعادلة (١١) يمكن كتابتها كما يلى

$$س = \sum_{و \neq هـ} أ^{-١}_{هو} ك_و + أ^{-١}_{هـ هـ} ك_هـ \qquad (١٢)$$

فاذا زاد الناتج النهائى للقطاع هـ بوحدة واحدة ، تستبدل $ك_هـ$ بالمقدار $ك_هـ + ١$ وتكون

$$س + \Delta س = \sum_{و \neq هـ} أ^{-١}_{هو} ك_و + أ^{-١}_{هـ هـ} (ك_هـ + ١)$$

$$= \sum_{و \neq هـ} أ^{-١}_{هو} ك_و + أ^{-١}_{هـ هـ} ك_هـ + أ^{-١}_{هـ هـ}$$

$$= \sum_{و = ١} أ^{-١}_{هو} ك_و + أ^{-١}_{هـ هـ} = س + أ^{-١}_{هـ هـ}$$

اى ان الزيادة فى الناتج الكلى $\Delta س$ تساوى $أ^{-١}_{هـ هـ}$ ، نتيجة لزيادة الناتج النهائى $ك_هـ$ بوحدة واحدة . فاذا كانت س ترمز لقطاع الفحم ، هـ ترمز لقطاع الصلب ، وأردنا أن نزيد الناتج النهائى من الصلب بمقدار طن واحد ، فان علينا ان نزيد الناتج الكلى من الفحم بمقدار $أ^{-١}_{هـ هـ}$. وفى المثال العددى اذا اعطيناه ، اذا زدنا الناتج النهائى للقطاع الاول بمقدار وحدة واحدة زاد الناتج الكلى فى القطاع الاول بمقدار ١٫٢٦٨ وحدة وفى القطاع الثانى بمقدار ٠٫٤٣٩٨ وحدة وهكذا .

كذلك نلاحظ من المعادلة (١١) او المعادلة (١٢) ان المعاملات $أ^{-١}_{هـ هـ}$ هى المشتقات الجزئية للناتج الكلى س بالنسبة للناتج النهائى $ك_هـ$:

$$أ^{-١}_{هـ هـ} = \frac{\partial س}{\partial ك_هـ} \qquad (١٣)$$

واذا زدنا النواتج النهائية للقطاعات المختلفة بالمقادير $\Delta ك_1$ ، $\Delta ك_2$ ، ... ، $\Delta ك_ن$ فان الناتج الكلى للقطاع $ر$ يزيد بمقدار

$$\Delta ق_ر = أ_{ر1} \Delta ك_1 + أ_{ر2} \Delta ك_2 + ... + أ_{رن} \Delta ك_ن .$$

وهذا يتضح من المثال السابق ، اذا زدنا النواتج النهائية للقطاعات الاربعة بمقدار ٢ ، ١ ، ٢ ، ٣ وحدات على الترتيب ، فان الناتج الكلى للقطاع الثانى يزيد بمقدار

$$\Delta ق_2 = (٤٣٩٨ر \times ٢) + (١ر٢٠٦٠) + (٤٧٧٦ر \times ٢) + (٣ \times ٧٥٥٣ر)$$
$$= ٣٠٧٠ر٥ \text{ وحدة} .$$

اضافة معادلة القوة العاملة للنموذج :

اذا اردنا الآن اضافة معادلة القوة العاملة للنموذج السابق ، فاننا نرى ان هذه المعادلة ليست مستقلة عن بقية المعادلات فى النموذج . وهى تكتب عادة فى الصيغة :

$$ق_ر = \sum_{س=1}^{ن} ك_س أ_{رس} + ك_ر . \qquad (١٤)$$

يمكن هنا ان نتصور معاملات للمعالة $أ_{رس}$ مقابلة للمعاملات الفنية ، وتمثل نسبة القوة العاملة فى قطاع انتاجى معين الى الناتج الكلى فى هذا القطاع :

$$أ_{رس} = \frac{ك_{رس}}{ق_س} \quad \text{أو} \quad ك_{رس} = أ_{رس} ق_س$$

وتكون $أ_{رس}$ هى القوة العاملة اللازمة لانتاج وحدة واحدة فى القطاع الرائى . ويمكننا باستخدام هذه العلاقة الأخيرة اعادة كتابة المعادلة (١٤) كما يلى :

$$ق_ر = \sum_{س=1}^{ن} أ_{رس} ق_س + ك_ر .$$

والتعويض من المعادلة (١١) فى هذه المعادلة :

$$ق_ر = \sum_{س=1}^{ن} أ_{رس} \left(\sum_{و=1}^{ن} أ_{سو} ك_و \right) + ك_ر .$$

والفاضل الجزئى

$$\frac{\partial ق_ر}{\partial ك_هـ} = \sum_{س=1}^{ن} أ_{رس} أ_{سهـ} \qquad (١٥)$$

هذه المعادلة الاخيرة تعنى ان الزيادة بمقدار وحدة واحدة فى الناتج النهائى للقطاع هـ تتطلب زيادة فى القوة العاملة قدرها $\sum_{ن=1} أ_{نهـ}$

وقد رأينا فيما سبق ان الزيادة بمقدار وحدة واحدة فى الناتج النهائى للقطاع هـ تتطلب زيادة فى الناتج الكلى للقطاعات المختلفة قدرها $أ_{1هـ}$ ، $أ_{2هـ}$ ، ٠٠٠٠ ، $أ_{نهـ}$.

وهذه الزيادة فى النواتج الكلية للقطاعات المختلفة تتطلب بدورها زيادة فى القوة العاملة . ويكون مجموع الاضافات المطلوبة من القوة العاملة مساوياً لمجموع الاضافات فى النواتج الكلية للقطاعات المختلفة مضروبة فى معاملات العمالة المناظرة . فاذا اردنا ان نزيد الناتج النهائى من الصلب بمقدار طن واحد ، كان علينا ان نزيد الناتج الكلى من الصلب والفحم والحديد الخام والقوة المحركة ، الخ . وكل زيادة فى هذه النواتج تتطلب قوة عاملة اضافية — ويكون اجمالى الزيادة المطلوبة فى العمالة نتيجة لانتاج طن اضافى من الصلب مساويا للقيمة المعطاة فى المعادلة (١٥) ، مع افتراض ان قطاع الصلب هو القطاع هـ .

جداول القيمة وجداول الكمية :

رأينا فيما سبق ان جداول المدخلات والمخرجات بالكميات تعطينا شروط الاتساق الداخلى لخطة الانتاج . وسنتناول الآن هذه الشروط بالنسبة للبرامج المعبر عنها بوحدات نقدية .

نبدأ بتعريف معاملات تكلفة عوامل الانتاج المقابلة للمعاملات الفنية بانها

$$أ_{سو} = \frac{س_{سو}}{س_{و}} \quad \text{حيث } س_{و} = ١٠٠٠٠٠٠ ن$$

وتمثل تكلفة ما يلزم من القطاع س لانتاج ما قيمته جنيه واحد فى القطاع و .

بالمثل تعرف معاملات تكلفة القوة العاملة كما يلى :

$$أ_{ن و} = \frac{س_{ن و}}{س_{و}} \quad \text{حيث } و = ١٠٠٠٠٠٠ ن$$

وهذه هى تكلفة القوة العاملة اللازمة لانتاج ما قيمته جنيه واحد من السلعة المنتجة فى القطاع و . وتكون معادلات توزيع الانتاج لدينا مطابقة للمعادلات الخاصة بالكميات مع استبدال $ك$ ، $ل$ ، $أ_{سو}$ بالرموز $ق$ ، $س$ ، $أ_{سو}$ على الترتيب .

وتكون معادلات التوزيع للخطة القيمية المقابلة للمعادلات (١٦أ) كما يلى

$$(\text{ا}-\text{أ}_{\text{ر}}) \text{س}_{\text{ر}} - \sum_{\text{ع}} \text{أ}_{\text{رع}} \text{س}_{\text{ع}} = \text{ص}_{\text{ر}} \quad \text{حيث ر} = ١، ٢، \ldots، \text{ن} \qquad (١٦\text{أ})$$

فاذا افترضنا ان الخطة تحدد القيم $\text{ص}_{\text{ر}}$ ، وان المعاملات $\text{أ}_{\text{رع}}$ معطاة ، فانه يمكن حل نموذج المعادلات (١٦) للحصول على قيم الفواتح الكلية $\text{س}_{\text{ر}}$. وبالعكس اذا كانت $\text{س}_{\text{ر}}$ محددة فى الخطة فيمكن حل النموذج للحصول على قيم الفواتح النهائية $\text{ص}_{\text{ر}}$.

ويمكن كتابة النموذج (١٦أ) باستخدام المصفوفات كما يلى

$$(\text{ا}-\text{أ})\,\text{س} = \text{ص} \qquad (١٦\text{ب})$$

حيث تمثل أ مصفوفة هيكل تكلفة الانتاج ، وهى المصفوفة المقابلة للمصفوفة الفنية أ :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \cdots\cdots & \text{أ}_{\text{ن}١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \cdots\cdots & \text{أ}_{\text{ن}٢} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{أ}_{١\text{ن}} & \text{أ}_{٢\text{ن}} & & \text{أ}_{\text{ن}\text{ن}} \end{bmatrix}$$

ويكون الحل على الصورة :

$$\text{س} = (\text{ا}-\text{أ})^{-١}\,\text{ص}$$

وفى المثال العددى السابق تكون المصفوفة $أ'$ وعكوسها كالآتى :

$$أ' = \begin{vmatrix} ٠٫٩٩٠٠ & -٠٫١٤٢٩ & -٠٫١٤٠٠ & -٠٫١٥٢٨ \\ -٠٫٢٤٠٠ & ٠٫٩٥٧١ & -٠٫٨٠٠٠ & -٠٫٢٢٢٢ \\ -٠٫١٥٠٠ & -٠٫٠٩٢٩ & ١٫٠٠٠٠ & -٠٫١٣٨٩ \\ -٠٫٨٠٠٠ & -٠٫٢٢٨٦ & -٠٫٢٢٢٢ & ٠٫٩٢٢٢ \end{vmatrix}$$

$$أ^{-١} = \begin{vmatrix} ١٫١٢٦٨ & ٠٫٢٥٥٧ & ٠٫٢١٨٠ & ٠٫٢٨٠٢ \\ ٠٫٣٥٩٢ & ١٫٠٢٦١ & ٠٫١٩١١ & ٠٫٢٧٧٧ \\ ٠٫٢٣١٦ & ٠٫٠٩٦١ & ١٫٠٥٨١ & ٠٫٢٤٦٦ \\ ٠٫٢١٥١ & ٠٫٠٤٠٢ & ٠٫٠٦٠٢ & ١٫٢٣٤٦ \end{vmatrix}$$

فاذا حددنا النواتج النهائية بالقيم ٣٠٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ١٠٠ على الترتيب ، فاننا نحصل من العلاقة (١٧) على النواتج الكلية :

$$س = \begin{bmatrix} ٥٥٣٫٦٠ \\ ٧٠٢٫٢٢٠ \\ ٦٠٥٫٢٠ \\ ٤٠٩٫١٩٠ \end{bmatrix}$$

كذلك يمكن ترجمة كل العلاقات السابقة الى علاقات بين القيم بدلا من الكميات .

واذا كان $ع_ر$ هو سعر الوحدة من الناتج فى القطاع $ر$ فان :-

$$ق_{ر و} = ك_{ر و} ع_ر \quad ، \quad ص_{ر و} = ن_{ر و} ع_ر \quad ، \quad ك_{ر و} = ك_{ر و} ع_ر$$

$$أ_{ر و} = \frac{س_{ر و}}{س_و} = \frac{ك_{ر و} ع_ر}{\sum_ر ك_{ر و} ع_ر} = أ_{ر و} \frac{ع_ر}{ع_و} \qquad (١٨)$$

تجميع القطاعات :

واينا فيما سبق ان جدول ليونتيف للمدخلات والمخرجات يتكون من قطاعات عددها ن . والسؤال الآن هو كم عدد القطاعات التى يمكن ان نقسم الاقتصاد القومى بموجبها فى الواقع العملى ؟ اذا اخذنا جدول المدخلات والمخرجات بالقيم النقدية كأساس للتخطيط ، فانه يمكننا عمليا تجميع كثير من القطاعات معا بمجرد تجميع عناصر هذه القطاعات . فيمكن مثلا تجميع قطاعات الحديد الخام والصلب والزهر ، الخ فى قطاع واحد يسمى قطاع الحديد والصلب . بيد ان عملية التجميع تكون من التعقيد بمكان اذا شملت المدخلات والمخرجات المبينة على اساس الكميات .

اذا اردنا — على سبيل المثال — تجميع القطاع و والقطاع ط فى قطاع واحد هـ وكان القطاع و يمثل انتاج الصلب ، بينما القطاع ط يمثل انتاج الحديد الزهر ، فان الكميات الآتية تمثل قطاع الحديد والصلب هـ :

$$س_{هـ} = س_{و} + س_{ط} \quad ، \quad س_{رهـ} = س_{رو} + س_{رط} \quad ، \quad س_{هـ} = س_{و} + س_{ط}$$

وتكون معاملات التكلفة لعوامل الانتاج

$$أ_{رهـ} = \frac{س_{رهـ}}{س_{هـ}} = \frac{س_{رو} + س_{رط}}{س_{و} + س_{ط}} = \frac{أ_{رو} س_{و} + أ_{رط} س_{ط}}{س_{و} + س_{ط}} \qquad (١٩)$$

أى أن المعاملات الجديدة لتكلفة عوامل الانتاج فى القطاع التجميعى هـ هى أوساط مرجحه لمعاملات تكلفة عوامل الانتاج فى القطاعات الأصلية ، وتكون الأوزان هى النواتج الكلية فى هذه القطاعات . وبنفس الطريقه يمكن تعميم عملية التجميع الى أى عدد من القطاعات ، بحيث يمكن ضغط مصفوفة المدخلات والمخرجات لتصغيرها الى أى درجه نشاء .

تحديد الأسعار ومعدل الأجر :

سنقوم الآن بتحديد الأسعار ع١ ، ع٢ ، ... ع ن لمنتجات القطاعات المختلفه ومعدل الأجر ع٠ بدلالة العناصر الأخرى فى الخطة ، لنعود مرة أخرى للمعادلات

(٤) : $س_ر = س_{ور} + \sum_{و=1}^{ن} س_{وو} + ح_ر$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ... ن

حيث $س_{ور}$ تمثل تكلفة القوة العاملة المستخدمة فى القطاع ر ، $\sum_{و=1}^{ن} س_{وو}$ تمثل تكلفة وسائل الانتاج ، $ح_ر$ الربح فى القطاع الرائى . فاذا كانت الأسعار تمثل القيم الفعلية للمنتجات ، فان $ح_ر$ ستمثل قيمة فائض الانتاج فى القطاع ر .

وقد رأينا أن

$$س_ر = ع_ر ك_ر \ ، \ س_{ور} = ع_و ك_{ور} = ع_و آ_{ور} ك_ر$$

$$س_{وو} = ع_و ك_{وو} = ع_و آ_{وو} ك_ر$$

واذا وضعنا $ح_ر = ت_ر ك_ر$ حيث $ت_ر = \frac{ح_ر}{ك_ر}$ هو ربح الوحدة الواحدة من انتاج القطاع ر ، فانه يمكن كتابه معادلات التكلفه (٤) على الصورة :

$$ع_ر ك_ر = ع_و آ_{ور} ك_ر + \sum_{و=1}^{ن} ع_و آ_{وو} ك_ر + ت_ر ك_ر$$

(حيث ر = ١ ، ٢ ، ... ن)

وبقسمة جميع حدود هذه المعادلات على $ك_ر$ نحصل على

$$ع_ر = ع_٠ آ_{٠ر} + \sum_{و=1}^{ن} ع_و آ_{وو} + ت_ر \quad (ر = ١ ، ٢ ، ... ن)$$

هذه المعادلات تكون نموذجا من ن معادلة بين معدل الأجر والأسعار والمنتجات ع١ ، ع٢ ، ... ع ن ، وربح الوحدة فى القطاعات المختلفه ت١ ، ت٢ ، ... ت ن

أى أن لدينا ن معادلة فى (٢ن + ١) من المجاهيل ، وبهذا يكون للخطة درجات حرية عددها ن + ١ وهى عدد المتغيرات التى يمكن اختيارها بطريقة تقديرية بينما نحصل على قيم بقية المتغيرات بحل النموذج (٢٠) .

ولحل هذا النموذج نبدأ باعادة كتابته على الصوره

$$(١ - \rho_{ر}) ع_{ر} - \text{جـ}_{ر} \sum_{و \neq ر} \rho_{و} ع_{و} = \rho_{ر} ع_{ر} + \pi_{ر} \quad (ر = ١ ، ٢ ، \ldots ، ن)$$

وتسهل هذه الصورة كتابة النموذج بدلالة المصفوفات :

$$أ^{٢} ع = أ^{١} ع + \Pi \qquad (٢١)$$

حيث $أ^{٢}$ هى محورة المصفوفة $أ$ من الدرجة ن × ن :

$$\rho^{٢} = \begin{bmatrix} ١ - أ_{١١} & - أ_{١٢} & \cdots & - أ_{١ن} \\ - أ_{٢ن} & - ١ - أ_{٢٢} & \cdots & - أ_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ - أ_{ان} & - أ_{٢ن} & \cdots & ١ - أ_{ننن} \end{bmatrix}$$

، ع ، $أ^{١}$ ، Π موجهات من الدرجة ن × ١ ، فاذا كان معدل الأجر ع ، وسعر الوحدة فى القطاعات المختلفة $\pi_{١}$ ، $\pi_{٢}$ ، $\pi_{٣}$ ، ... ، $\pi_{ن}$ محددة فى الخطة ، فانه يمكننا حل النموذج (٢١) بالضرب فى مقلوب المصفوفة $أ^{٢}$ والحصول على قيمة الموجه ع بدلالة معاملات تكلفة الانتاج ، والمتغيرات التى حددتها الخطة :

$$ع = أ^{-١}_{٢} أ^{١}_{٠} ع_{٠} + أ^{-١}_{٢} \Pi \qquad (٢٢)$$

ويلاحظ أن الكميات $ك_{ر}$ لاتظهر فى المعادلات (٢١) ، وبالتالى فان الأسعار فى الحل (٢٢) لاتتوقف على معدل الخطة ، أى أنه يمكننا زيادة الناتج أو انقاصه دون أن يؤثر ذلك على الحل الذى نحصل عليه للنموذج .

من المعادلة (٢٢) يمكن كتابة سعر الوحدة فى القطاع الرائى على الصورة :

$$ع_{ر} = \text{جـ}_{و=١}^{ن} أ^{-١}_{ور} (أ^{١}_{٠} ع_{٠} + \pi_{و})$$

$$= \text{جـ}_{و=١}^{ن} أ^{-١}_{ور} (أ^{١}_{٠} ع_{٠} + \pi_{و}) \qquad (ر = ١ ، ٢ ، \ldots ، ن) \qquad (٢٣)$$

فاذا اردنا أن نجد التفسير الاقتصادى للمعاملات $أ^{-١}_{ور}$ فى هذا السياق ، فاننا نلاحظ أن هذه المعاملات هى المشتقات الجزئية للأسعار بالنسبة لأرباح الوحدة فى القطاعات المختلفة .

$$\frac{\partial ع_{ر}}{\partial \pi_{و}} = أ^{-١}_{ور}$$

ومن هذه العلاقة نرى كيف تؤثر الزيادة فى ربح الوحدة فى أحد القطاعات على الأسعار فى القطاعات الأخرى . ولهذا فانه أحيانا مايطلق على المعاملات $\frac{\partial ع_ر}{\partial ع_ه}$ " معاملات حساسية الأسعار للتغيرات فى الأرباح" . كذلك اذا قمنا بايجاد المشتقات الجزئية للأسعار $ع_ر$ بالنسبة لمعدل الأجر $و$ فاننا نحصل على " معاملات حساسية الأسعار للتغيرات فى معدل الأجر :

$$\frac{\partial ع_ر}{\partial و} = \text{مجـ}_{ه=1}^{ن} \; أ^{-1}_{ه ر} \; أ_{و ه}$$

والمعادلات (٢٥) تبين كيف يؤثر معدل الأجر على أسعار المنتجات . فالزيادة فى معدل الأجر تؤثر فى السعر تأثيرا يتناسب مع معاملات العمالة $أ_{و ه}$ فتزيد الأسعار بمعدل أكبر فى القطاعات التى تستخدم من قوة العمل أكثر فى غيرها من القطاعات الأخرى .

ومن المعادلات (٢٣) يمكن أن نعطى تفسيرا آخر لمعاملات حساسية الأسعار للتغيرات فى معدل الأجر . فمن هذه المعادلات نرى أن السعر $ع_ر$ هو المجموع المرجح للأرباح بالنسبة للوحدة $ط_ه$ وتكلفة العمل $أ_{و ه} \cdot و$ للوحدة من المنتج . ويمكن النظر الى القيمة ($أ_{و ه} \cdot و + ط_ه$) على أنها تمثل القيمة المضافة بالنسبة لوحدة واحدة من المنتج فاذا رمزنا لهذه القيمة بالرمز $ق_ه$ فان :-

$$\frac{\partial ع_ر}{\partial ق_ه} = أ^{-1}_{ه ر}$$

أى أن حساسية الأسعار فى القطاع $ر$ للتغيرات فى القيمة المضافة فى القطاع $ه$ تساوى المعامل $أ^{-1}_{ه ر}$.

مما سبق يتضح أن الأجور والأسعار والأرباح ترتبط جميعا بنموذج من العلاقات تحددها الشروط الفنيه للانتاج . ويكون للنموذج درجات حرية عددها $ن \times 1$ ، بمعنى أنه من بين المتغيرات الداخلة فى النموذج والتى يبلغ عددها $2ن + 1$ نستطيع أن نحدد $ن + 1$ من هذه المتغيرات بطريقة تقديرية ، بينما تتحدد قيم بقية المتغيرات بحل نموذج المعادلات ، وتكون حلول هذه المعادلات متجانسة بحيث لاتتغير المعادلات اذا ضربت الأسعار والأجور والأرباح فى مقدار معين $ل$.

لنعد مرة أخرى الى معادلات التوزيع (٩أ)

$$(1 - أ_{ر ر}) ك_ر - \text{مجـ}_{و \neq ر} أ_{ر و} ك_و = ك_ر \qquad (ر = 1، 2، ... ن) \quad (٩أ)$$

وكما قلنا فان الناتج النهائي $ك_ر$ في سنة معينة ، يتجه جزء منه للاستهلاك وجزء آخر للتصدير ، بينما يخصص جزء ثالث للتخزين للاستعمال المستقبل . وهذا الجزء الأخير قد يذهب الى الاستهلاك أو الاستثمار في فترة زمنية لاحقة . كذلك يمكن اضافه الصادرات من قطاع معين الى الجزء المخصص للاستهلاك أو الاستثمار ، بحسب ما اذا كانت الواردات التي ستتيحها عملية التصدير ستذهب الى الاستهلاك أو الاستثمار . وبهذا يمكننا أن نقسم الناتج النهائي $ك_ر$ للقطاع الرائي الى قسمين : الأول $ك_ر^{(1)}$ مخصص للاستهلاك والثاني $ك_ر^{(2)}$ مخصص للاستثمار ، فتكون

$$ك_ر = ك_ر^{(1)} + ك_ر^{(2)} \qquad (ر = 1، 2، ... ن) \quad (٢٧)$$

كذلك يمكننا تعريف معامل الاستهلاك القطاعي $م_ر$ ومعامل الاستثمار القطاعي $ل_ر$ كما يلي :

$$م_ر = \frac{ك_ر^{(1)}}{ك_ر} \quad ، \quad ل_ر = \frac{ك_ر^{(2)}}{ك_ر}$$

حيث يرمز المعامل الأول الى نسبة الجزء من ناتج القطاع الرائي الذي يذهب الى الاستهلاك الى الناتج الكلي في هذا القطاع ، ويرمز المعامل الثاني الى نسبة الجزء المخصص للاستثمار الى الناتج الكلي ، ويفترض عادة أن هذه النسب تحددها الخطة .

وبالتعويض في المعادلة (٢٧)

$$ك_ر = م_ر ك_ر + ل_ر ك_ر = (م_ر + ل_ر) ك_ر$$

ومنها يمكن اعادة كتابة معادلات التوزيع (٩أ) كما يلي :

$$(1 - أ_{ر ر}) ك_ر - \text{مجـ}_{و \neq ر} أ_{ر و} ك_و = (م_ر + ل_ر) ك_ر$$

أو

$$(1 - أ_{ر ر} - م_ر - ل_ر) ك_ر - \text{مجـ}_{و \neq ر} أ_{ر و} ك_و = \text{صفر} \qquad (ر = 1، 2، ... ن) \quad (٢٨)$$

وبهذا يكون لدينا نموذج جديد من ن معادلة متجانسة في ن من المجاهيل

ويمكن كتابة هذا النموذج بصيغة المصفوفات .

$$\text{حيث } \bar{A}^* = \begin{bmatrix} 1-a_{11}-m_1-l_1 & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22}-m_2-l_2 & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & 1-a_{nn}-m_n-l_n \end{bmatrix}$$

حيث يشترط هنا لحل هذا النموذج بحيث يعطى قيما لكل من $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \ldots \bar{K}_n$ لاتساوى الصفر ، أن تكون المصفوفة $\bar{A}^*$ صفرية المحدد . وحيث أن قيم المعاملات الفنيه معطاه ولانستطيع تغييرها ، فانه يمكن فقط التحكم فى معاملات الاستهلاك m_r ومعاملات الاستثمار l_r بحيث تكون قيمة محدد المصفوفة $\bar{A}^*$ تساوى الصفر . وبهذا فانه لايمكننا تحديد قيم كل هذه المعاملات بطريقة تقديرية ، لانه قد ينتج عن ذلك أن تكون الخطة غير متسقة اتساقا داخليا ، وبالتالى يكون تنفيذها غير ممكن .

وانما يجب تحديد قيمة بعض هذه المعاملات بحيث تعطى محددا للمصفوفة $\bar{A}^*$ تساوى الصفر .

الاستثمار وزيادة الانتاج :

ستحاول الآن أن ندرس تأثير الاستثمار فى وحدة زمنيه معينة على الانتاج فى فترة زمنية لاحقه . لنرمز للنواتج الكليه للقطاعات المختلفه فى السنه ز بالرموز $\bar{K}_1(ز)$ ، $\bar{K}_2(ز)$ ..... $\bar{K}_n(ز)$ وللنواتج النهائية بالرموز $k_1(ز)$ ، $k_2(ز)$ ، .... $k_n(ز)$ وبالمثل نرمز للنواتج الكلية والنواتج النهائية للسنة (ز + ١) بالرموز $\bar{K}_1(ز+1)$ ، $\bar{K}_2(ز+1)$ ..... $\bar{K}_n(ز+1)$ ، $k_1(ز+1)$ ، $k_2(ز+1)$ ، .... $k_n(ز+1)$ على الترتيب .

وترتبط الخطة فى السنة (ز+١) بالخطة فى السنة ز عن طريق المخزون المتركم فى السنة ز . فكلما زادت التراكمات فى سنة معينة كلما زادت الموارد التى يمكن استخدامها فى الخطة فى السنة اللاحقة .

ويمكن اعادة كتابة المعادلة (٢٧) بالنسبة للسنة ز كمايلى :

$$k_r(ز) = k_r^{(1)}(ز) + k_r^{(2)}(ز)$$

فاذا رمزنا بالرمز $k_{ro}(ز)$ لذلك الجزء من الناتج النهائى فى القطاع r الذى يذهب للاستثمار فى وسائل الانتاج فى القطاع o ، فان مجموع مايذهب للقطاعات المختلفة

يساوى اجمالى الناتج النهائى فى القطاع ر الذى يستثمر فى السنة ز ، أى أن $ك_{ر}^{(٢)}(ز)$

$$= \text{مجـ}_{و=١}^{ن} هـ\ ك_{ر و}(ز) \qquad (ر = ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠٠ ، ن) \qquad (٣٠)$$

ونبحث الآن العلاقة بين الكميات $هـ\ ك_{ر و}(ز)$ التى تعبر عن الجزء من الناتج النهائى فى القطاع ر الذى يستثمر فى القطاع و وبين كمية التغير فى الناتج الكلى فى القطاع و والتى تساوى $ك_{و}(ز+١) - ك_{و}(ز)$.

وحيث أن الزيادة بمقدار وحدة واحدة من الناتج الكلى فى القطاع وتتطلب كمية قدرها $آ_{ر و}$ من ناتج القطاع ر ، فان الزيادة بمقدار $ك_{و}(ز+١) - ك_{و}(ز)$ تتطلب $هـ\ ك_{ر و}(ز)$

$$= آ_{ر و}\ [ك_{و}(ز+١) - ك_{و}(ز)]$$

على أنه اذا كان ناتج القطاع الرائى الذى يذهب للاستثمار فى القطاع ويمثل معدات أو آلات أو مبانى أو ما الى ذلك ، فانه يجب أن نأخذ فى الاعتبار فى المعادلة السابقة المدة التى تستهلك فيها مثل هذه الآلات أو المبانى . فاذا كانت $آ_{ر و}$ هى المدة التى تستهلك فيها المعدات التى تذهب من القطاع ر للاستثمار فى القطاع و ، فان

$$هـ\ ك_{ر و}(ز) = آ_{ر و}\ آ_{ر و}\ [ك_{و}(ز+١) - ك_{و}(ز)]$$ وإذا كتبنا $ب_{ر و} = آ_{ر و}\ آ_{ر و}$:

$$هـ\ ك_{ر و}(ز) = ب_{ر و}\ [ك_{و}(ز+١) - ك_{و}(ز)] \qquad (٣٢)$$

من هذا نرى أنه فى حالة كون الناتج المستثمر فى من القطاع الرائى يأخذ شكل معدات ثابتة ، فان هناك عاملان كل منهما ذو طبيعة فنية يؤثران تأثيرا مباشرا على الانتاج فى القطاع و ، الأول هو قيمة المعاملات الفنية للانتاج $آ_{ر و}$ والتى تمثل ما يلزم استخدامه سنويا من القطاع ر لانتاج وحدة واحدة فى القطاع و والثانى هو المدة التى يستهلك خلالها ناتج القطاع ر . والمعامل $آ_{ر و}$ قد يكون أكبر من أو أصغر من أو يساوى الوحدة طبقا لما اذا كانت الفترة التى تعمرها السلعة أكبر من أو أصغر من أو تساوى سنة واحدة . ويسمى المعامل $ب_{ر و}$ بمعامل الاستثمار ، ويمثل كمية الناتج من القطاع ر الذى يلزم استثماره فى القطاع و لكى يمكن زيادة الناتج الكلى فى القطاع الأخير بمقدار وحدة واحدة . ويكون

$$ب_{ر و} = \frac{هـ\ ك_{ر و}(ز)}{ك_{و}(ز+١) - ك_{و}(ز)} \qquad ر = ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠٠٠٠٠ ، ن$$

وتكون مصفوفة معاملات الاستثمار (التى حدها العام $ب_{ر و}$) هى المصفوفة التى تربط خطط الانتاج فى السنوات المتتابعة .

ولتوضيح هذه النقطة نرسم جدول الاستثمار الآتى :

جـدول ٤

$ك_1(ز+1)$	$حـ ك_{11}(ز)$ $حـ ك_{21}(ز)$ ..... $حـ ك_{1ن}(ز)$		$ك^2_1(ز)$
$ك_2(ز+1)$	$حـ ك_{12}(ز)$ $حـ ك_{22}(ز)$ ..... $حـ ك_{2ن}(ز)$		$ك^2_2(ز)$
.	. . .		.
.	. . .		.
.	. . .		.
.	. . .		.
.	. . .		.
$ك_ن(ز+1)$	$حـ ك_{ن1}(ز)$ $حـ ك_{ن2}(ز)$ ..... $حـ ك_{نن}(ز)$		$ك^2_ن(ز)$

حيث يعطى العمود الأخير الكميات من الناتج النهائى فى القطاعات المختلفة التى تحققت فى السنة ز وخصصت للاستثمار فى قطاعات الانتاج المختلفة • بينما يبين الجزء الأوسط من الجدول الكميات التى تمثل ما يستثمر من القطاع ر فى القطاع و ، وتساوى فى مجموعها الكميات المعطاه فى العمود الأخير •

ونتيجة لتخصيص جزء من الناتج فى السنة ز لزيادة وسائل الانتاج فى السنه (ز + ١) فان النواتج الكليه $ك_1(ز+1)$ ، ..... ، $ك_ن(ز+1)$ تزيد عن الكميات المقابلة فى السنة ز ، حيث تمثل المعادلة (٣٢) مقدار هذه الزيادة • وبالتعويض من المعادلة (٣٢) فى المعادلة (٣٠) نجد

$$\text{جيب}_{و=1} \; ب_{ر و} \Delta ك_و(ز+1) = ك^{(2)}_ر(ز) \qquad (ر = 1، 2، ..... ن) \quad (٣٣)$$

وتعطينا هذه المعادلة العلاقة بين الكمية من الناتج النهائى فى كل قطاع التى تذهب للاستثمار فى القطاعات المختلفة ، وبين الزيادات فى الناتج الكلى فى مختلف القطاعات فى السنة التالية • فاذا كانت معاملات الاستثمار $ب_{ر و}$ معروفة ، وقمنا فى الخطة بتحديد الكميات التى ستخصص للاستثمار فى القطاعات المختلفة ، فان الزيادات فى النواتج الكلية $\Delta ك_و(ز+1) = ك_و(ز+1) - ك_و(ز)$ تتحدد تماما بحل النموذج السابق • وبالعكس اذا حددت الخطة الزيادات فى النواتج الكلية ، فان حل النموذج يعطينا الكميات التى يجب تخصيصها للاستثمار • ويتبين هنا مرة أخرى أهمية المعاملات الفنية للانتاج فى تحديد الزيادات فى النواتج الكلية أو فى تحديد كميات الاستثمار •

والنموذج (٣٣) يمكن كتابته على الصورة

$$ب \Delta ك(ز+1) = ك^{(2)}(ز) \qquad (٣٤)$$

حيث ب هى مصفوفة معاملات الاستثمار من الدرجة ن × ن ، $\Delta_{س}(ز+١)$ ، $\Delta_{س}(ز)$ ، $ك^{(٢)}$ موجهات من الدرجة ن × ١ ، وبالضرب فى مقلوب المصفوفة ب نحصل على الحل :

$$\Delta_{س}(ز+١) - \Delta_{س}(ز) = ب - ١ \; ك^{(٢)} \qquad (٣٥)$$

حيث الحد العام فى هذا الموجه الأخير يساوى

$$\Delta_{س_ر}(ز+١) - \Delta_{س_ر}(ز) = مجـ_{و=١}^{ن} ب^{-١}_{ر و} \; ك^{(٢)}_{و}(ز) \qquad (٣٦)$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة يتضح أن الزيادة فى الناتج الكلى للقطاع ر هى المجموع المرجح للكميات من النواتج النهائية المخصصة للاستثمار ، وتكون الأوزان هى المعاملات $ب^{-١}_{ر و}$ التى هى عناصر مقلوب مصفوفة معاملات الاستثمار .

ويمكن تفسير المعاملات $ب^{-١}_{ر و}$ بأنها الزيادة فى الناتج فى القطاع ر التى تحدث نتيجة لزيادة الناتج فى القطاع و بوحدة واحدة . فمن المعادلة (٣٦) لدينا

$$\Delta_{س_ر}(ز+١) = \Delta_{س_ر}(ز) + مجـ_{و=١}^{ن} ب^{-١}_{ر و} \; ك^{(٢)}_{و}(ز)$$

وبالتفاضل

$$\frac{\Delta \Delta_{س_ر}(ز+١)}{(٢)} = ب^{-١}_{ر هـ}$$

$$\Delta \; ك^{(٢)}_{هـ}(ز)$$

وعلى هذا فان $ب^{-١}_{ر هـ}$ تمثل كما قلنا تأثير الزيادة فى الاستثمار من ناتج القطاع هـ على الزيادة فى ناتج القطاع ر ولهذا فانه يطلق على المعامل $ب^{-١}_{ر هـ}$ معامل كفاءة الاستثمار بين القطاعات . وبافتراض ثبات هذه المعاملات نستطيع حل النموذج حلولا تعاقبية لنحصل على النواتج الكلية فى السنوات التتالية $س_ر(ز)$ ، $س_ر(ز+١)$ ، $س_ر(ز+٢)$ .. وهكذا .

ويمكن اجراء التحليل السابق فى حالة برنامج مبنى على أساس وحدات نقدية . فكما سبق نقسم الناتج النهائى $س_ر(ز)$ الى جزء مخصص للاستهلاك وآخر مخصص للاستثمار . :

$$س_ر(ز) = س^{(١)}_{ر}(ز) + س^{(٢)}_{ر}(ز)$$

حيث يوزع الجزء الثانى من الطرف الايسر من المعادلة على الاستثمارات فى القطاعات المختلفة حسب معادلة التوزيع :

$$س^{(٢)}_{ر}(ز) = مجـ_{و=١}^{ن} حـ_{ر و} \; س_و(ز) \qquad (ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن) \qquad (٣٧)$$

حيث تمثل $حـ_{ر و}$ قيمة الجزء من المتراكم فى الناتج النهائى للقطاع ر الذى يستثمر فى القطاع و . والمعادلات (٣٧) يمكن تمثيلها بالجدول التالى :

جدول ٥

$\Delta س_{11}(ز)$ $\quad \Delta س_{21}(ز)$ ..... $\Delta س_{ان}(ز)$	$س_1^{(٢)}(ز)$
$\Delta س_{12}(ز)$ $\quad \Delta س_{22}(ز)$ ..... $\Delta س_{٢ن}(ز)$	$س_2^{(٢)}(ز)$
. . .	.
. . .	.
. . .	.
$\Delta س_{ن1}(ز)$ $\quad \Delta س_{ن2}(ز)$ ..... $\Delta س_{ننن}(ز)$	$س_ن^{(٢)}(ز)$

وتكون المعاملات النقدية للاستثمار

$$ب_{س_و} = آ_{س_و} \; آ_{س_و}$$

$$= آ_{و} \; \frac{ع_{ع}}{ع_و} \; آ_{س_و}$$

$$= ب_{س_و} \; \frac{ع_{ع}}{ع_و} \qquad \text{حيث } س_{ع_و} = ١، ٢، ..... ن$$

وفي حالة تجميع القطاعات نجد أن المعاملات النقدية للاستثمار في القطاع التجميعي هي أوساط مرجحة للمعاملات في القطاع التي يتم تجميعها . فاذا أردنا تجميع القطاع و والقطاع ط في قطاع واحد هـ ، فانه يكون لدينا :

$$ب_{س_و} = \frac{\Delta س_و(ز)}{س_{ع_و}(ز+١) - س_{ع_و}(ز)} \quad ، \quad ط = \frac{\Delta س_ط(ز)}{س_{ع_ط}(ز+١) - س_{ع_ط}(ز)}$$

$$ب_{س_هـ} = \frac{\Delta س_هـ(ز)}{س_{ع_هـ}(ز+١) - س_{ع_هـ}(ز)}$$

$$= \frac{\Delta س_و(ز) + \Delta س_ط(ز)}{س_{ع_و}(ز+١) + س_{ع_ط}(ز+١) - س_{ع_و}(ز) - س_{ع_ط}(ز)}$$

$$= \frac{ق_و[س_{ع_و}(ز+١) - س_{ع_و}(ز)] + ب_{س_ط}[س_{ع_ط}(ز+١) - س_{ع_ط}(ز)]}{[س_{ع_و}(ز+١) - س_{ع_و}(ز)] + [س_{ع_ط}(ز+١) - س_{ع_ط}(ز)]}$$

وكما قمنا بحل النموذج بوحدات كمية ، يمكننا بنفس الطريقة حل النموذج بالوحدات النقدية ويلزم لهذا اعادة كتابة المعادلات (٣٧) على الصورة :

$$\text{مجـ}_{و=1}\ \text{ب}^{-1}_{و}\ [\text{س}_{و}(\text{ز}+1) - \text{س}_{و}(\text{ز})] = \text{س}^{(2)}(\text{ز}) \quad (\text{س}_{و}=2{,}61\ \text{ن}) \quad (38)$$

أو باستخدام المصفوفات

$$\text{ب}^{-1}[\text{س}(\text{ز}+1) - \text{س}(\text{ز})] = \text{س}^{(2)} \quad (39)$$

ويكون الحل بالضرب فى مقلوب المصفوفة ب^{-1}

$$[\text{س}(\text{ز}+1) - \text{س}(\text{ز})] = \text{ب}^{-1}\ \text{س}^{(2)} \quad (40)$$

حيث الحد العام فى هذا الموجه يساوى

$$\text{س}(\text{ز}+1) - \text{س}(\text{ز}) = \text{مجـ}_{و=1}\ \text{ب}^{-1}_{و}\ \text{س}^{(2)}_{و}(\text{ز}) \quad (41)$$

ويسمى المعامل $\text{ب}^{-1}_{و}$ بالمعامل القيمى لكفاءة الاستثمار بين القطاعات ، ويمثل الزيادة القيمية فى ناتج القطاع الرائى الناتجة عن زيادة الاستثمارات من ناتج القطاع ووحدة واحدة وهكذا يمكننا الحصول على قيمة الناتج الكلى للقطاعات المختلفة فى السنة (ز+1) وباستخدام تقديرات جديدة للجزء المخصص للاستثمار من الناتج النهائى للسنة (ز+1) نستطيع أن نحصل من المعادلة (40) على قيم النواتج الكلية للقطاعات المختلفة فى السنة (ز+2) وهكذا هذا بالطبع مع افتراض ثبات المعاملات $\text{ب}_{و}$.

تأثير تركيب الاستثمار على اجمالى الناتج القومى :

نفترض هنا أن جداول المدخلات والمخرجات (وبالتالى الخطة العامة) تشمل جميع قطاعات الاقتصاد القومى ، ونبحث تأثير المتراكم فى القطاعات المختلفة على نمو الناتج القومى .

نعرف الناتج القومى فى السنة ز بأنه

$$\text{س}(\text{ز}) = \text{مجـ}_{ن=1}\ \text{س}_{ن}(\text{ز})$$

وتكون الزيادة فى اجمالى الناتج القومى من السنة ز الى السنة ز+1 هى

$$\text{س}(\text{ز}+1) - \text{س}(\text{ز}) = \text{مجـ}[\text{س}(\text{ز}+1) - \text{س}(\text{ز})]$$

$$= \text{مجـ}\ \text{مجـ}\ \text{ب}^{-1}_{و}\ \text{س}^{(2)}_{و}(\text{ز})$$

فاذا عرفنا اجمالى الاستثمار فى السنة ز بأنه يساوى $\text{ك}(\text{ز})$ حيث $\text{ك}(\text{ز})$ هو معدل الاستثمار ، فان قيمة الاستثمارات من القطاعات المختلفة تساوى المقدار السابق مضروبة فى كسر معين ، $\text{ك}_{ن}(\text{ز})$ ، حيث $\text{مجـ}_{ن=1}\ \text{ك}_{ن}(\text{ز}) = 1$ ، وتكون

$$\text{س}^{(2)}_{و}(\text{ز}) = \text{ك}_{و}(\text{ز})\ \text{ك}(\text{ز})\ \text{س}(\text{ز})$$

وبالتعويض من هذه المعادلة الأخيرة فى المعادلة (42)

$$\text{س}(\text{ز}+1) - \text{س}(\text{ز}) = \text{مجـ}\ \text{مجـ}\ \text{ب}^{-1}_{و}\ \text{ك}_{و}(\text{ز})\ \text{ك}(\text{ز})\ \text{س}(\text{ز})$$

وبالقسمة على $ن_{ن}(ز)$ نحصل على معدل نمو الناتج القومى :

$$\frac{ن_{ن}(ز+1) - ن_{ن}(ز)}{ن_{ن}(ز)} = مجـ_{و} ب_{و} \, ا_{و}(ز) \, \alpha(ز)$$

وللتبسيط نرمز للطرف الايمن من المعادلة (٤٣) بالرمز $ن$ وللقيمة $مجـ_{و} ب_{و} \, ا_{و}(ز)$ بالرمز $\beta(ز)$ ، فيكون

$$ن = \alpha(ز) \, \beta(ز) \qquad (٤٤)$$

ومعنى هذه العلاقة أن معدل نمو الناتج القومى يساوى المعدل الشامل للاستثمار مضروبا فى عامل آخر β يمثل متوسط كفاءة الاستثمارات فى القطاعات المختلفة .

وفى دراسة لاقتصاديات الولايات المتحدة فى الفترة من ١٨٧٩ الى ١٩٥٠ وجد أن متوسط كفاءة الاستثمار حوالى $\frac{١}{٣}$ بينما تراوح هذا المتوسط بين $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ فى دراسة عن المملكة المتحدة مابين السنوات ١٨٧٠ ، ١٩٣٨ .

لنحسب الآن تأثير برنامج استثمار معين على حجم الناتج القومى خلال عدد معين من السنين ز ، ز ، ..... ، زهـ :

لنفرض أن معدلات الاستثمار فى السنوات المتتالية كانت $\alpha(ز)$ ، $(ز_{١})$ ، ..... ، $(ز_{هـ})$ وأن معاملات تركيب الاستثمار للقطاعات المختلفة هى $ا_{و}(ز)$ ، $ا_{و}(ز_{١})$ ، .... ، $ا_{و}(ز_{هـ})$ فبفرض معلومية معاملات الاستثمار $ب_{و}$ ، نستطيع أن نحدد متوسط الكفاءة $\beta(ز)$ ، $\beta(ز_{١})$ ، ..... ، $\beta(ز_{هـ})$.

فاذا كان اجمالى الناتج القومى فى السنة الأولى هو $ن_{ن}(ز) = مجـ_{ن=١} ن_{ن}(ز)$ ،

فان اجمالى الناتج القومى فى السنة زهـ يساوى

$$ن_{ن}(زهـ) = \prod_{ز=١}^{هـ} [١ + \alpha(ز) \, \beta(ز)] \, ن_{ن}(ز) \qquad (٤٥)$$

وفى الحالة الخاصة التى يكون فيها معدل الاستثمار $\alpha(ز)$ والمعاملات $ا_{و}(ز)$ ثابتة لاتتغير من سنة لأخرى وتساوى α ، $ا_{و}$ على الترتيب ، فان $\beta(ز) = \beta$ وتصبح المعادلة (٤٥) فى الصورة :

$$ن_{ن}(زهـ) = (١ + \alpha \beta)^{هـ - ز} \, ن_{ن}(ز)$$

$$= (١ + ن)^{هـ - ز} \, ن_{ن}(ز) \qquad (٤٦)$$

العلاقة بين معدل نمو الناتج القومي ومعدل نمو الدخل القومي :

نعلم أن الدخل القومي في سنة من السنين هو مجموع قيم النواتج النهائية في القطاعات المختلفة ، أي أن س (ز) = مجـ س (ز) . ولدينا من معادلات التوزيع أن

$$س_{ن}(ز) = س_{ن}(ز) - \text{مجـ}_{و=1} \; آ_{ن و} \; س_{و}(ز) \qquad (ن = 1 ، 2 ، \ldots)$$

تتكون

$$س(ز) = س(ز) - \text{مجـ}_{ن=1} \; \text{مجـ}_{و=1} \; آ_{ن و} \; س_{و}(ز) \qquad (٤٧)$$

حيث يمثل الحد الثاني على اليسار الجزء من الناتج القومي الذي يخصص لاحلال (أو استبدال) وسائل الانتاج المستخدمة في السنة موضع البحث . ونرمز لمعدل الاستبدال بالرمز

$$\sigma(ز) = \frac{\text{مجـ}_{ن} \; \text{مجـ}_{و} \; آ_{ن و} \; س_{و}(ز)}{س(ز)}$$

وبالتعويض بهذه القيمة في المعادلة (٤٧) نجد أن

$$س(ز) = س(ز)\,[1 - \sigma(ز)] \qquad (٤٨)$$

فاذا رمزنا لمعدل نمو الدخل القومي بالرمز ك (ز) يكون لدينا

$$\frac{س(ز+1)}{س(ز)} = 1 + ك(ز) = \frac{س(ز+1)\,[1 - \sigma(ز+1)]}{س(ز)\,[1 - \sigma(ز)]}$$

$$= [1 + نـ(ز)] \frac{1 - \sigma(ز+1)}{1 - \sigma(ز)} \qquad (٤٩)$$

ومن هذه المعادلة 1 + ك (ز) هو معامل نمو الدخل القومي ، بينما 1 + نـ (ز) هو معامل نمو الناتج القومي — وتشير 1 — σ(ز) ، 1 — σ (ز+1) الى الجزء من الناتج القومي الغير مستخدم في القطاعات الانتاجية المختلفة (وبهذا يكون الناتج النهائي) وبهذا نرى أن معامل نمو الدخل القومي يساوى معامل نمو الناتج القومي مضروبا في معامل يمثل التغير في معدل الناتج النهائي .

كذلك ، اذا كان الدخل القومي في السنة ز هو س (ز) فانه في السنة ز هـ يساوى

$$س(ز_{هـ}) = \prod_{ز}^{ز_{هـ}} [1 + ك(ز)]\; س(ز)$$

فاذا كان المعدل (ز) ثابتا ، تكون

$$س(ز_{هـ}) = (1 + ك)^{ز_{هـ} - ز} \; س(ز) \qquad (٥٠)$$

الاستثمار ونمو العمالة :

قلنا فيما سبق أن قيمة القوة العاملة اللازمة لانتاج ماقيمته جنيه واحد فى القطاع ر هى أ ر
فاذا كانت الزيادة فى الناتج الكلى فى القطاع الرائى هى س ر (ز+١) ـ س ر (ز) فانه لكى
يمكن الحصول على هذه الزيادة فى الناتج يلزمنا أن نضيف الى القوة العاملة المستخدمة
ماقيمته :

أ ر [س ر (ز+١) ـ س ر (ز)]

لنعد مرة أخرى الى المعادلة (٤١) :

$$\text{س ر (ز+١)} - \text{س ر (ز)} = \text{مجـ}_{و=1}^{ن} \text{ب ر و} \; \text{س}_{و}^{(٢)} \text{(ز)} \qquad (٤١)$$

ومنها نجد أن الزيادة فى العمالة فى القطاع الرائى تساوى

$$\text{أ ر [س ر (ز+١) ـ س ر (ز)]} = \text{أ ر مجـ}_{و=1}^{ن} \text{ب ر و} \; \text{س}_{و}^{(٢)} \text{(ز)}$$

ومنها نحصل على الزيادة فى العمالة فى القطاعات كلها :

$$\text{مجـ أ ر [س ر (ز+١) ـ س ر (ز)]} = \text{مجـ أ ر مجـ ب ر و} \; \text{س}_{و}^{(٢)} \text{(ز)} \qquad (٥١)$$

ويمكن تبسيط هذه المعادلة بوضع

$$\text{ك و} = \text{مجـ أ ر ب ر و} \qquad (\text{و} = ١، ٢، ٠٠٠٠٠٠٠، \text{ن})$$

حيث ك و هى الزيادة الكلية فى العمالة (بوحدات نقدية) التى تحدث نتيجة لتخصيص
وحدة واحدة من ناتج القطاع وللاستثمار . ولهذا تصبح المعادل (٥١) على الصورة :

$$\text{مجـ أ ر [س ر (ز+١) ـ س ر (ز)]} = \text{مجـ ك و} \; \text{س}_{و}^{(٢)} \text{(ز)}$$

$$= \text{مجـ ك و} \; \alpha \text{(ز)} \; \text{م و (ز)} \; \text{س (ز)}$$

$$= \alpha \text{(ز)} \; \text{س (ز)} \; \text{مجـ ك و م و (ز)}$$

حيث α (ز) هى معدل الاستثمار ، س (ز) اجمالى الناتج القومى ، م و (ز) معامل
تركيب الاستثمار . وأخيرا ، اذا وضعنا ك (ز) = مجـ ك و م و (ز) فان ك (ز) تكون
متوسط معاملات العمالة لنواتج القطاعات المختلفة . وتكون الزيادة الكلية فى العمالة هى

$$\text{مجـ أ ر [س ر (ز+١) ـ س ر (ز)]} = \alpha \text{(ز)} \; \text{س (ز)} \; \text{ك (ز)} \qquad (٥٢)$$

فاذا قسمنا هذه الزيادة على قيمة العمالة الكلية فى السنة ز نحصل على معدل نمو العمالة :

$$\text{ع (ز)} = \frac{\text{مجـ أ ر [س ر (ز+١) ـ س ر (ز)]}}{\text{مجـ أ ر س ر (ز)}} = \frac{\alpha \text{(ز)} \; \text{س (ز)} \; \text{ك (ز)}}{\text{مجـ أ ر س ر (ز)}}$$

فاذا عرفنا معامل متوسط العمالة بالنسبة للناتج القومى بأنه

$$\text{أ (ز)} = \frac{\text{مجـ أ ر س ر (ز)}}{\text{س (ز)}}$$

فان الصيغة السابقة لمعدل نمو العمالة تصبح

$$\frac{\dot{ن}(ز)}{ن(ز)} = \alpha(ز) \frac{\dot{ل}(ز)}{ل(ز)} \qquad (٥٣)$$

وبهذا نرى أن معدل نمو العمالة يساوى معدل الاستثمار $\alpha(ز)$ مضروبا فى نسبة معامل متوسط العمالة $ل(ز)$ الى معامل العمالة للناتج القومى $آ_ن(ز)$ ومن هذه الصيغة يتضح لنا أننا اذا أردنا أن نزيد من نمو العمالة ، فاما أن نرفع معدل الاستثمار أو نرفع معامل متوسط العمالة بأن نستثمر فى القطاعات التى تستخدم من الأيدى العاملة أكثر من غيرها من القطاعات .

اذا أردنا الآن أن نجرى مقارنة بين معدل نمو العمالة ومعدل نمو الناتج القومى فاننا نلاحظ أنه اذا كانت النسبة $\frac{\dot{ل}(ز)}{ل(ز)}$ أكبر من الوحدة فان معنى هذا أن الناتج القومى ينمو بمعدل أكبر من معدل نمو العمالة ، وبالعكس اذا كانت هذه النسبة أصغر من الوحدة فان الناتج القومى ينمو بمعدل أقل من معدل نمو العمالة لدينا .

$$\frac{\dot{ن}(ز)}{ن(ز)} = \alpha(ز) \frac{\beta(ز)}{ل(ز)} \quad \therefore \quad \beta(ز) = \frac{ل(ز)}{آ_ن(ز)} \alpha(ز)$$

فاذا كانت $\beta(ز) > \frac{ل(ز)}{آ_ن(ز)}$ فان الناتج القومى يزيد بأسرع من العمالة . وبالعكس اذا كانت $\beta(ز) < \frac{ل(ز)}{آ_ن(ز)}$ فان الناتج القومى ينمو بمعدل أقل من معدل نمو العمالة . بينما يتساوى المعدلان اذا كانت $\beta(ز) = \frac{ل(ز)}{آ_ن(ز)}$

كفاءة الاستثمار فى القطاعات المختلفة :

عند دراسة تأثير الاستثمار على نمو الناتج القومى والعمالة ، درسنا الجانب الاقتصادى لتأثير تركيب برنامج استثمار معين . وقد افترضنا فى هذه الدراسة ان الناتج من كل قطاع اتجه الى الاستثمار فى القطاعات الأخرى طبقا لمعادلات التوزيع (٣٧) وعرفنا المعاملات $ب_{ر}$ بأنها معاملات كفاءة المستثمر من ناتج القطاع فى القطاع ر ، والمعاملات $\beta_{و}$ بأنها الكفاءة الكلية للمستثمر من ناتج القطاع و ، والمعامل $\beta(ز)$ بأنه متوسط كفاءة الاستثمار الكلى فى السنة ز . كذلك عرفنا $ل$ وبأنها معاملات العمالة المترتبة على الاستثمارات فى القطاع و ، $ل(ز)$ بأنه معامل متوسط العمالة المترتبة على كل الاستثمارات فى السنة ز .

ويهمنا عند وضع الخطة أن نعرف تأثير الاستثمارات فى القطاعات المختلفة على النشاط الاقتصادى . أى أننا نود أن ندرس تأثير توزيع الاستثمارات على القطاعات على نمو الناتج القومى والعمالة . ولهذا الغرض نقوم بتكوين الجدول الآتى :

جدول ٦

$$\begin{array}{l}
ب_{11}[س_1(ز+1)-س_1(ز)]\ ب_{21}[س_2(ز+1)-س_2(ز)]\ \cdots\ ب_{ن1}[س_ن(ز+1)-س_ن(ز)] \quad س_1^{(2)}(ز) \\
ب_{12}[س_1(ز+1)-س_1(ز)]\ ب_{22}[س_2(ز+1)-س_2(ز)]\ \cdots\ ب_{ن2}[س_ن(ز+1)-س_ن(ز)] \quad س_2^{(2)}(ز) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
ب_{1ن}[س_1(ز+1)-س_1(ز)]\ ب_{2ن}[س_2(ز+1)-س_2(ز)]\ \cdots\ ب_{نن}[س_ن(ز+1)-س_ن(ز)] \quad س_ن^{(2)}(ز)
\end{array}$$

$$س_1(ز+1)-س_1(ز)\ مجـ ب_{و1}[س_1(ز+1)-س_1(ز)]\ مجـ ب_{و2}\ \cdots\ [س_ن(ز+1)-س_ن(ز)]\ مجـ ب_{ون}$$

$$\alpha(ز)\ س(ز)$$

حيث يكون لدينا في المصفوفة الوسطى للجدول القيم من النواتج المختلفة المستمدة في قطاعات الاقتصاد القومي ، فلكي يزيد الناتج الكلي في القطاع بمقدار $س_ر(ز+1)-س_ر(ز)$ فانه يلزم أن نستثمر من القطاع و في القطاع ما قيمته $ب_{ور}[س_ر(ز+1)-س_ر(ز)]$ ، حيث انه يلزم استثمار ما قيمته $ب_{ور}$ للحصول على زيادة في الناتج قدرها وحدة واحدة ويعطينا المجموع في الصف معادلات التوزيع :

$$مجـ ب_{ور}[س_ر(ز+1)-س_ر(ز)] = س_و^{(2)}(ز) \qquad و=1،2،\cdots،ن \qquad (٣٨)$$

ولكي ندرس التأثير الاقتصادي للاستثمارات في القطاعات المختلفة للاقتصاد القومي ، نأخذ مجاميع الأعمدة في المصفوفة الوسطى للجدول ، حيث تمثل هذه المجاميع قيم كل الاستثمارات في القطاعات المختلفة . وبهذا ، فانه لكي يزيد الناتج الكلي في القطاع ر بمقدار $س_ر(ز+1)-س_ر(ز)$ فان اجمالي ما يجب أن يستثمر من كل القطاعات في القطاع ر يساوي ما قيمته $[س_ر(ز+1)-س_ر(ز)]$ مجـ $ب_{ور}$ ويكون مجـ $ب_{ور}$ هو اجمالي ميجب استثماره في القطاع ر للحصول على زيادة قدرها جنيه واحد في ناتج هذا القطاع .

وأخيرا نلاحظ أن اجمالي الاستثمارات على مستوى الاقتصاد القومي كله يجب أن يساوي مجموع ما يذهب من نواتج القطاعات المختلفة للاستثمار ، أي أن

$$مجـ[س_ر(ز+1)-س_ر(ز)]مجـ ب_{ور} = مجـ س_و^{(2)}(ز) = \alpha(ز)\ س(ز) \qquad (٥٤)$$

حيث $\alpha(ز)$ هو معدل الاستثمار ، $س(ز)$ هو اجمالي الناتج القومي في السنة ز

رأينا أن اجمالى ما يلزم استثماره من كل القطاعات فى القطاع ر للحصول على زيادة قيمتها جنيه واحد فى ناتج هذا القطاع هو مجـ ب وَر ، فاذا وضعنا

$$\eta_{ر} = \frac{1}{\text{مجـ ب وَر}} \quad (ر = 1 ، 2 ، \ldots ، ن) \qquad (٥٥)$$

فان هذه القيمة تعبر عن نسبة الزيادة فى ناتج القطاع ر للاستثمارات فى هذا القطاع أو بمعنى آخر الزيادة فى الناتج بالنسبة لوحدة واحدة من الاستثمارات وتسمى هذه النسبة بكفاءة الاستثمار فى القطاع ر

فاذا رمزنا بالرمز $\lambda_{ر}(ز)$ لذلك الجزء (الكسر) من اجمالى الاستثمارات ، المستثمر خلال السنة ز فى القطاع الرائى ، حيث مجـ $\lambda_{ر}(ز) = 1$ ، فان قيمة الاستثمارات فى القطاع الرائى تساوى :

$$[س_{ر}(ز+1) - س_{ر}(ز)] \text{ مجـ ب وَر} = \lambda_{ر}(ز)\, \alpha(ز)\, س(ز)$$

وبالتعويض من (٥٥) :

$$س_{ر}(ز+1) - س_{ر}(ز) = \alpha(ز) س(ز) \lambda_{ر}(ز) \eta_{ر} = 1{,}261{,}000{,}000 \text{ ن} \qquad (٥٦)$$

وبالجمع على كل القطاعات نحصل على الزيادة فى الناتج القومى

$$س(ز+1) - س(ز) = \alpha(ز) س(ز) \text{ مجـ } \eta_{ر} \lambda_{ر}(ز) \qquad (٥٧)$$

ومن هذه العلاقة نحصل على معدل نمو الناتج القومى بالقسمة على س(ز)

$$ن(ز) = \alpha(ز) \text{ مجـ } \eta_{ر} \lambda_{ر}(ز) \qquad (٥٨)$$

وتوضح لنا هذه العلاقة كيف يعتمد معدل نمو الناتج القومى على توزيع الاستثمارات بين القطاعات المختلفة وعلى كفاءة الاستثمارات فى هذه القطاعات .

ثانيا : أمثلية الخطة :

من الجزء السابق ، والذى تناول شروط الاتساق الداخلى للخطة ، رأينا أن الشروط الفنيه للانتاج تفرض علينا علاقات انتاجية معينة ، لانستطيع أن نتجاهلها فى عملية التخطيط فاذا تحققنا من الاتساق الداخلى للخطة ، فان علينا أن نختار من بين البدائل الممكنة ماهو الأمثل ، وقد وجدنا أن البرامج المتسقة اتساقا داخليا لها فى المعتاد ودرجات حرية عددها ن ، بمعنى أن الخطة يمكن أن تبنى على تحديد قيمة النواتج الكلية ، بينما نحصل على الناتج النهائى لكل قطاع بحل المعادلات ، أو على أية حال يمكن اختيار بعض الكميات بطريقة تعسفية لكى يمكن حل المعادلات بالنسبة لباقى المتغيرات .

والسؤال الآن هو كيف تتم عملية الاختيار المذكورة ؟ لقد أوردنا فيما سبق أنه يمكن أن تكون هناك معايير مختلفة للخطط المثلى ، فيمكن مثلا أن تعتبر الخطة أفضل مايمكن اذا ما أعطتنا أقصى قيمة ممكنة للدخل القومى ، ويمكن التعبير عن ذلك بالشرط

$$\text{مجـ}_{ن}^{ن=1} \quad \text{س}_{ن} = \text{حد أقصى}$$

الى جانب هذا ، فان هناك شروطا أخرى يجب أن تتحقق : هذه الشروط تأخذ صورة المتباينات .

$$\text{س}_{ن} \geq \text{صفر} \qquad = 1 ، 2 ، \ldots\ldots ، ن$$

بمعنى أنه يجب الا يكون الناتج النهائى لأى قطاع سالبا .

هذا النوع من المشكلة ، التى تحل عن طريق ايجاد القيمة القصوى لمجموع بسيط او مرجح لبعض الكميات ، بحيث تخضع فى نفس الوقت لبعض القيود الخطية الجانبية (التى تتمثل هنا فى معادلات توزيع الانتاج) ، ولبعض المتباينات التى تضع حدودا عليا أو حدودا دنيا لبعض المتغيرات ، تمثل مايطلق عليه "البرمجة الخطية" .

وبالطبع ليس هناك مايجعل من الضرورة أن تكون العلاقات كلها خطية ولكن حل المعادلات الخطية أسهل بكثير من حل المعادلات غير الخطية .

من المشاكل التى بحثناها فيما سبق ، والتى تتعلق بأمثلية البرامج مشكلة تخطيط الاستثمار فقد حسبنا الزيادة فى الناتج القومى خلال سنة معينة :

$$\Delta(ز+1) - (ز) = \text{مجـ}_{و} \text{مجـ}_{ب^{-1}و} \text{س}^{(2)}_{و}(ز)$$

ودرسنا مايجب أن يكون عليه تركيب الاستثمار بحيث تكون الزيادة فى الناتج القومى أقصى مايمكن . وقد وجدنا أن معدل نمو الناتج القومى يساوى

$$\Delta(ز) = \frac{\Delta^{2}(ز+1) - \Delta^{2}(ز)}{\Delta^{2}(ز)} = \text{مجـ}_{و} \text{مجـ}_{ب^{-1}و} \Delta^{2}(ز) \quad (ز)$$

$$= \Delta^{2}(ز) \; \beta \; (ز)$$

وبهذا تصبح المشكلة هى محاولة ايجاد مجموعة من المعاملات $\lambda_{و}$ (ز) ١٢ صفر بحيث تحقق الشروط مجـ $\lambda_{و}$ (ز) = ١ وتجعل ϕ (ز) تأخذ أكبر قيمة ممكنة :

ϕ (ز) = حد أقصى

ولن نتعرض هنا لتفاصيل حل النماذج باستخدام البرمجة الخطية ، حيث أن هذا هو موضوع أحد المقررات العامة للدورة . ولكننا سنعرض فى القسم الثانى من هذه الدراسة لبعض تطبيقات البرمجة الخطية فى التخطيط الصناعى على مستوى الوحدة الصناعية .

القسم الثانى

تطبيقات البرمجه الخطية فى التخطيط الصناعى على مستوى الوحدة

مقدمة :

تقوم الادارة فى أى منشأة صناعية بمواجهة مشكلة تخطيط عملياتها لفترة مقبله • والى جانب التخطيط الشامل لمجمل انتاج المنشأة ، فان هناك أيضا مشاكل ذات طبيعة محدودة يشملها التخطيط مثل مشكلة تحديد نسب المواد الخام التى تعطى أقل تكلفه ممكنة لانتاج معين أومشكلة تحديد القوائم المثلى لعمليات النقل •

مثل هذه المشكلات فى عليات الانتاج ، تمر فى سبيل حلها بمرحلتين من مراحل التخطيط • المرحلة الأولى تشمل تحديد البدائل الممكنة ، أى تحديد الطرق البديلة للانتاج التى تتفق مع امكانيات المشروع • ويحتاج المخطط هنا الى بيانات ذات طبيعة فنية الى حد بعيد ، فاذا أراد أن يحدد النسب البديلة للمواد الخام التى يمكن استخدامها بحيث تعطى مواصفات نوعية معينة للسلع المنتجة ، فلا شك أن هذا سيتوقف على طبيعة السلعة وعلى امكانية انتاجها بطرق بديلة تختلف فيها نسب المواد الداخلة فى صنعها •

أما المرحلة الثانية فهى مرحلة الاختيار من بين هذه البدائل ما يمكن أن يوصف بأنه الأمثل من الناحية الاقتصادية • مثال ذلك اختيار برنامج الانتاج الكلى الذى يؤدى الى أقصى عائد ممكن ، أو اختيار نسب المواد الخام التى تؤدى الى أقل تكلفة •

وفى التطبيق العملى ، كثيرا ما تحل مشكلات تخطيط العمليات فى المنشآت الصغيرة بطرق تختلف من الحدس والاستنتاج الى عمليات منتظمة من التجربة والخطأ ، غالبا ما تؤدى الى نتائج معقولة ، حيث أنها مبنية على التجربة العملية • على أنه اذا كبر حجم المشروع ، فان عددا كبيرا من مشاكل تخطيط العمليات يصبح من التعقيد بمكان بحيث لا يكون من السهل حله بمثل هذه الطرق ، ويتعين على القائمين بالادارة استخدام الطرق العلمية لحل هذه

المشاكل . ويقصد هنا بالطرق العلمية صياغة المشكلة فى نموذج رياضى يأخذ فى الاعتبار كل العناصر التى تؤثر فى جوانب المشكلة ، وتكون معاملات هذه العناصر هى البيانات الاقتصادية والفنية للمشكلة . وتقوم بعد هذا بحساب الحل الأمثل لهذا النموذج .

والبرمجه الخطية هى احدى طرق بحوث العمليات المبنية على الفكرة السابقة . وتتلخص كما قلنا فى نهاية القسم الأول فى ايجاد النهاية العظمى أو الصغرى لدالة خطية تعرف بدالة الهدف أو دالة التفضيل ، وتخضع فى نفس الوقت لشروط جانبية — خطية أيضا — ولشرط ألا يأخذ أى من المتغيرات قيمة سالبة ، وتكون الشروط الجانبية (أو القيود) نموذجا من المعادلات الخطية . فاذا زاد عدد المتغيرات فى النموذج عن عدد المعادلات ، فاننا نحصل فى المعتاد على عدد لا نهائى من الحلول ، نفضل منها تلك الحلول التى تعطى قيمة سالبة لأى من المتغيرات ، وتكون المشكلة بعد هذا هى ايجاد الحل الذى يعطى أكبر قيمة للدالة الخطية ، المستخدمه كمعيار للحل الأمثل .

وكثيرا ما يحدث أن البدائل الممكنة تبدو كحلول مختلفة لنموذج من المعادلات الخطية التى هى تعبيرات رياضية عن القيود الفنية والاقتصادية التى تحد من حرية المنشأة على الحركة . فعلى سبيل المثال ، يجب أن يكون اجمالى الاستخدام المخطط لكل آلة فى حدود ١٠٠ فى المائة من قدرة هذه الآلة ، بينما اذا أخذنا كل ناتج على حدة ، فان نواتج العمليات المختلفة يجب أن تكون فى مجموعها مساوية للانتاج المخطط . بالاضافة الى هذا ، فان المعيار الاقتصادى الذى تستخدمه المؤسسة للاختيار من بين البدائل يمكن دائما صياغة على أنه محاولة للوصول بالدالة الخطية لنفس المتغيرات الى أقصى أو أدنى قيمة لها .

وفى حالات كثيرة يكون أقصى ربح أو عائد هو المعيار للحل الأمثل ، ويكون العائد الكلى دالة خطية فى المدخلات والمخرجات ، بينما تكون أسعار هذه المدخلات والمخرجات بمثابة معاملات ثابتة . كذلك فان أدنى تكلفة لانتاج معين تعنى الوصول الى النهاية الصغرى للدالة الخطية فى المدخلات .

أما شرط الحلول غير السالبة ، فالمقصود به مجرد الحصول على حلول لها معنى اقتصادى فمن الواضح أن الحل الذى يعطى كمية سالبة للانتاج هو حل غير مقبول .

النمـاذج الخطية للانتـــاج

تنحصر مشكلة تخطيط الانتاج فى الاختيار من بين البدائل الممكنة ، يعتبر الأمثـــل كما سبق أن قلنا • وتكون الحلول البديلة (الغير سالبة) هى البدائل الممكنة لعملية تخطيط الانتاج • ويطلق على مجموعة المعادلات أو المتباينات الخطية التى تمثل الشروط الجانبيـــة " النموذج الخطى للانتاج " •

وتنقسم المتغيرات الداخلة فى النموذج الخطى للانتاج الى قسمين • يشمل القســـم الأول منها كميات المنتجات (المخرجات) التى يتم انتاجها خلال الفترة التى تشملها الخطـــة بينما يتكون القسم الثانى من الكميات المستخدمه من عناصر الانتاج (المدخلات) ، مثل العمـــل والمواد الخام والقوة المحركة والالات ••• الخ • وسنرمز [1] لكميات المخرجات بالرموز $س_1$ ، $س_2$ ، •••• ، $س_ن$ ولكميات المدخلات بالرموز $ص_1$ ، $ص_2$ ، ••• ، $ص_م$ •

ويرتبط النوع الأول من المتغيرات بالنوع الثانى بعلاقات فنية تتوقف على عمليات الانتـــاج ، التى تتحول فيها المدخلات الى مخرجات • وفى حالة ثبات نسبة المدخلات من عمل ومـــواد خام وقوى ••• الخ ، التى تستخدم لانتاج وحدة واحدة من المنتج ، تكون العلاقات كالاتى :

$$ص_{مو} = أ_{رو} \, س_{و} \qquad \begin{cases} م = 1 ، 2 ، ••• ، م \\ و = 1 ، 2 ، ••• ، ن \end{cases} \qquad (1)$$

أو اذا استخدمنا المصفوفات

$$ص = أ \, س \qquad (2)$$

حيث $ص$ هى موجة المدخلات من الدرجة م ، $س$ موجة من الدرجة ن للمخرجـــات أ هى مصفوفة المعاملات الفنية للانتاج من الدرجة م × ن ، يمثل العنصر $أ_{رو}$ فيها

---

١ ـ يجب ملاحظة أن الرموز هنا لا تشير الى المتغيرات التى تناولها البحث فى القســـم الاول من هذه المذكرة •

الكمية التى تستخدم فى عنصر الانتاج ... الانتاج وحدة واحدة من المنتج ، و(٢) ، ويكون اجمالى ما يستخدم فى عنصر الانتاج ... مساويا :

$$\text{(٣)} \qquad \text{...} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{...} \text{...} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{أ} \text{...}$$

وتمثل هذه المعادلات حالة عدم امكانية انتاج السلع المراد انتاجها الا بطريقة واحدة تحلها المعاملات الفنية أ ، بحيث تتغير مواصفات الانتاج اذا ما تغيرت قيمة أحد هذه المعاملات على أنه كثيرا ما يمكن انتاج السلعة بطرق بديلة تختلف فيها نسب عناصر الانتاج المستخدمة من طريقة لأخرى ، وتظل مع ذلك المواصفات الفنية للسلعة على ما هى عليه دون أن يطرأ عليها أية تغييرات معنوية .

وغالبا ما يكون لدينا - بالاضافة الى العلاقات الفنية السابقة - علاقات ذات طبيعة اقتصادية . مثال ذلك القيود التى تفرضها مقدرة الالات والمعدات الموجودة فى المنشأة على الانتاج . ففى الأجل القصير لا يمكن زيادة القدرة الانتاجية عن طريق شراء وتركيب آلات ومعدات جديدة ، ويتعين اذن فى تخطيط عمليات الانتاج أن نأخذ فى الاعتبار الحد الاقصى للقدرة الحالية للمعدات الرأسمالية ، بحيث يكون اجمالى ما يستخدم من عنصر الانتاج أقل من أو يساوى القيمة المتاحة من هذا العنصر ، ...

$$\text{(٤)} \qquad \text{...} \leq \text{...}$$

كذلك قد نجد من الافضل أن نقوم مقدما بتحديد الكمية الواجب انتاجها ، ثم نحسب نسب المدخلات التى تعطى هذا الانتاج بأقل تكلفة ممكنة . فاذا رمزنا للكمية المخططة لانتاج السلعة و بالرمز ... فانه يكون لدينا القيد الآتى :

$$\text{(٥)} \qquad \text{...} = \text{...}$$

---

(٢) يلاحظ الفرق بين المعاملات الفنية التى تحكم العلاقة بين المدخلات والمخرجات على مستوى المشروع الصناعى ، والمعاملات الفنية بين القطاعات التى عرفناها فى القسم الاول من المذكرة .

أما اذا كانت المنشأة قد تعاقدت فعلا على توريد كميات معينة من السلعة فى الفترة التى يشملها التخطيط ، فان هذه الكميات تمثل حدا أدنى للانتاج ، ويكون لدينا الشرط

$$س_{ن} \geq \quad و \qquad (٦)$$

كما يمكن استبدال هذه المتباينة بأخرى مبنية على أساس الحد الاقصى للانتاج الذى تحدده تقديرات توقعات المبيعات ، فتكون

$$س_{ن} \leq \quad و \qquad (٧)$$

لنفرض الان أن سلعة معينة يدخل فى انتاجها أربعة من عناصر الانتاج بنسب ثابتة ، أى أن المعاملات الفنية للانتاج لا يمكن تغييرها . يمكننا اذن صياغة العلاقات الفنية كما يلى :

$$\begin{aligned} أ_{١}\ س_{ن} &= ص_{١} \\ أ_{٢}\ س_{ن} &= ص_{٢} \\ أ_{٣}\ س_{ن} &= ص_{٣} \\ أ_{٤}\ س_{ن} &= ص_{٤} \end{aligned} \qquad (٨)$$

فاذا كان من الممكن الحصول على العنصرين الاولين من عناصر الانتاج بأية كمية نرغبها بينما كانت هناك حدود عليا لما يمكن الحصول عليه من العنصرين الآخرين ، فانه يتعين اضافة القيود الخطية الآتية :

$$\begin{aligned} أ_{٣}\ س_{ن} &\leq ص_{٣} \\ أ_{٤}\ س_{ن} &\leq ص_{٤} \end{aligned} \qquad (٩)$$

حيث $ص_{٣}$ ، $ص_{٤}$ هما أقصى ما يمكن الحصول عليه من العنصرية الثالث والرابع . ومن الشرطين الآخرين تتحدد قيمة $س_{ن}$ التى يمكن انتاجها بقيمة $\frac{ص_{٣}}{أ_{٣}}$ أو $\frac{ص_{٤}}{أ_{٤}}$ أيهما أقل . بينما تفيد المعادلتين الاولى والثانية فى تحديد قيمة المدخلات $أ_{١}$

من المتغيرين ١ ، ٢ اللازمة لانتاج الكمية من السلعة ٠

لنفترض الان أن هناك طرقا عددها ل لانتاج نفس السلعة بنفس مختلفة من عناصر الانتاج ـ أى أن هناك ل مجموعة من المعاملات الفنية يمكن باستخدام أى مجموعة منها الحصول على نفس مواصفات الانتاج ، وأنه يمكن للمنشأة استخدام كل هذه الطرق فى وقت معا ٠ فاذا كانت س١ هى الكمية المخطط انتاجها من السلعة باستخدام الطريقة الاولى ، س٢ ، هى الكمية المخطط انتاجها من السلعة باستخدام الطريقة الثانية وهكذا ، فان النموذج يكون كما يلى :

$$
\begin{aligned}
\text{س}_1 + \text{س}_2 + \cdots + \text{س}_{\text{ل}} &= \text{س}_{\text{ن}} \\
\text{أ}_{11}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{21}\,\text{س}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{ل}1}\,\text{س}_{\text{ل}} &= \text{ك}_1 \\
\text{أ}_{12}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{22}\,\text{س}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{ل}2}\,\text{س}_{\text{ل}} &= \text{ك}_2 \\
\text{أ}_{13}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{23}\,\text{س}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{ل}3}\,\text{س}_{\text{ل}} &= \text{ك}_3 \\
\text{أ}_{14}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{24}\,\text{س}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{ل}4}\,\text{س}_{\text{ل}} &= \text{ك}_4
\end{aligned}
\qquad (١٠)
$$

بينما تصاغ القيود الخطية التى تمثل أقصى ما يمكن الحصول عليه من المتغيرين الثالث والرابع كما يلى :

$$
\begin{aligned}
\text{أ}_{13}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{23}\,\text{س}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{ل}3}\,\text{س}_{\text{ل}} &\leq \text{ك}_3 \\
\text{أ}_{14}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{24}\,\text{س}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{ل}4}\,\text{س}_{\text{ل}} &\leq \text{ك}_4
\end{aligned}
\qquad (١١)
$$

يتضح من هذا أن مجموعة البدائل الممكنة لتخطيط الانتاج تتحدد بمجموعة من المتباينات الخطية التى عادة ما يكون لها عدد لا نهائى من الحلول ، نقبل منها فقط تلك الحلول التى تعطى قيما غير سالبة للانشطة الانتاجية ٠ بينما يكون هناك عدد محدود من الحلول الاساسية الممكنة ٠

فاذا أضفنا الى العلاقات الفنية السابقة شرط تحديد قيمة الناتج الكلى مقدما ، بدلا من ترك هذا الناتج تحدده الامكانيات المتاحة ، فانه يكون لدينا الشرط الخطى الآتى :

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 + \cdots + \text{س}_{\text{ل}} = \bar{\text{س}} \qquad (12)$$

وهذا الشرط بالاضافة الى شرط عدم سلبية المتغيرات يحدد مجموعة البدائل الممكنة بالنسبة لـ س$_1$ ، س$_2$ ، .... ، س$_{\text{ل}}$ التى يمكن تركيبها سويا بعدد لا نهائى من الطرق ، بينما ل فقط من هذه الطرق تكون الحلول الأساسية .

وفى الحالة العامة التى يتحدد فيها الناتج الكلى مقدما ، كما تتحدد أيضا الحدود العليا لما يمكن استخدامه من عناصر الانتاج ، يكون النموذج خطيا كما سبق ، ويشمل متباينات كالتى أشتمل عليها النموذج (١١) ومعادلة على نمط المعادلة (١٢) .

وتتناول النظرية الكلاسيكية الحديثة للانتاج حالتين فقط من العلاقات بين المدخلات والمخرجات فى خطوط المنشأة : الأولى هى الحالة التى لا يمكن انتاج السلعة فيها الا بطريقة واحدة ، فالمعاملات الفنية للانتاج ثابتة لا تتغير أما الحالة الثانية فهى التى يمكن فيها انتاج السلعة بعدد لا نهائى من الطرق ، حيث يمكن احداث تغيرات متناهية فى الصغر فى نسب المدخلات . فى هذه الحالة ل = ∞ ، وتكون دالة الانتاج دالة مستمرة فى المدخلات .

أما فى الحالة التى تكون فيها ل أكبر من الوحدة ولكن أقل من ∞ ، فانه تكون لدينا حالة وسط يطلق عليها " امكانية الاحلال المستمر بين المدخلات " ، بمعنى أنه يمكن انتاج السلعة بعدد محدود من طرق الانتاج .

يمكن الان تعميم نموذج الانتاج الخطى لأكثر من سلعة منتجة . فاذا كانت المنشأة تنتج سلعا عددها ن ، بطرق مختلفة عددها ل ، مستخدمة م من عناصر الانتاج ، فان النموذج يصبح كالاتى :

$$
\begin{aligned}
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&ب_{11} س_1 + ب_{12} س_2 + \cdots + ب_{1ل} س_ل = ص_م \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&ب_{ن1} س_1 + ب_{ن2} س_2 + \cdots + ب_{نل} س_ل = ص_ن \qquad (١٣) \\
&أ_{11} س_1 + أ_{12} س_2 + \cdots + أ_{1ل} س_ل = ص_1 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&أ_{م1} س_1 + أ_{م2} س_2 + \cdots + أ_{مل} س_ل = ص_م
\end{aligned}
$$

حيث تمثل $أ_{ر و}$ ، $ب_{ر و}$ على الترتيب بمعاملات المدخلات والمخرجات ، وكثيرا ما يكون بعض هذه المعاملات صفرا . وتمثل $س_و$ بمستوى النشاط الرائى ، فاذا كانت $س_1 = 1$ فمعنى هذا أننا نستخدم فى هذه العملية الانتاجية وحدات قدرها $أ_{11}$ ، $أ_{12}$ ، ... ، $أ_{م1}$ من المدخلات $ص_1$ ، $ص_2$ ، ... ، $ص_م$ على الترتيب لكى تنتج $ب_{11}$ ، $ب_{12}$ ، ... ، $ب_{ن1}$ وحدة من السلع المختلفة .

فاذا أضفنا الى النموذج (١٣) المتباينات الخاصة بالامكانيات المتاحة من المدخلات ، أو القيود التى تفرض على كمية الانتاج ، نحصل على مجموعة من المعادلات الخطية التى تحدد مدى الاختيار المفتوح أمام المنشأة . وتكون الحلول الممكنة هى دائما الحلول التى لا تعطى قيما سالبة .

وتكون الخطوة التالية بعد تحديد المدى الذى تنحصر فيه الحلول الممكنة ، هى ايجاد الحل الأمثل ، حيث عادة ما يكون الربح هو معيار الامثلية فى المنشآت الصناعية . وغالبا ما يمكن التعبير عن الربح فى صورة دالة خطية فى المتغيرات الداخلة فى نموذج الانتاج ، وتكون مشكلة تخطيط الانتاج فى هذه الحالة مشكلة فى البرمجة الخطية .

لنأخذ مثلا النموذج (١٠) الذى تحكمه قيود الامكانيات (١١) . اذا كانت ع هى السعر الذى تباع به السلعة ، وكانت $ع_1$ ، $ع_2$ هى على الترتيب أسعار الوحدة من المدخلات المتغيرة صـ١ ، صـ٢ ، وكانت $س_1$ هى عدد الوحدات المنتجة من السلعة باتباع طريقة الانتاج الأولى ، فان مجمل الربح الذى تحصل عليه المنشأة من هذه العملية الانتاجية يكون مساويا لايرادات المبيعات ناقصا التكلفة المتغيرة ، أى

$$(ع - أ_{11} ع_1 - أ_{12} ع_2) س_1 = ح_1 س_1 \qquad (١٤)$$

حيث $ح_1$ هى اجمالى الربح للوحدة من السلعة ، وتكون مقدار ثابتا اذا أمكن افتراض ثبات الاسعار . وهكذا يكون اجمالى الربح فى العمليات الانتاجية كلها دالة خطية فى المتغيرات الداخلة فى (١١) :

$$ح = ح_1 س_1 + ح_2 س_2 + \cdots + ح_ل س_ل \qquad (١٥)$$

ونحاول الوصول بهذه الدالة الى أقصى قيمة لها ، بحيث تتضح فى نفس الوقت الشروط الخطية (١١) .

ويلاحظ هنا أن الدالة التى أردنا ايجاد أكبر قيمة لها هى دالة اجمالى الربح ، بينما تريد المنشأة أن تصل بصافى الربح الى أقصاه (بعد طرح تكلفة العناصر الثابتة صـ٣ ، صـ٤) . ذلك لأن كلتا الدالتين تعطيان نفس النتائج ، حيث أن الحل الذى يعطى أقصى قيمة لدالة معينة ، هو نفس الحل الذى يعطى أقصى قيمة لهذه الدالة مطروحا فيها مقدار ثابت . وتكلفة العنصرين الثالث والرابع تكون ثابتة لأى برنامج انتاج تختاره المنشأة . أما اذا كانت المشكلة هى تحديد ذلك الخليط من المدخلات الذى يعطى أقل تكلفة ممكنة لانتاج معين ، محدده كمية سلفا ، فان معيار الامثلية هنا يكون الوصول الى أدنى قيمة للدالة الخطية فى التكلفة . وتكون معاملات هذه الدالة هى تكلفة الوحدة من المدخلات المتغيرة ، ففى عملية الانتاج الاولى تكون التكلفة المتغيرة :

$$(أ_{11} ع_1 + أ_{12} ع_2) س_1 = ك_1 س_1 \quad (١٦)$$

وبالنسبة لجميع الأنشطة (عمليات الانتاج) تكون الدالة

$$ك = ك_1 س_1 + ك_2 س_2 + \cdots + ك_ل س_ل \quad (١٧)$$

ويجب أن يلاحظ هنا أن الحالة الثانية – حالة الوصول بالتكلفة الى أدنى قيمة لها بالنسبة لانتاج معين – هي حالة خاصة من محاولة الوصول بالربح الى أقصاه . ذلك أنه اذا كان الانتاج محدد سلفا بالكمية $س_ك$ ، فان الوصول بالدالة $ح = ع س_ك - ك$ الى أقصى قيمة لها يساوى تماما الوصول بالدالة ك الى أدنى قيمة لها ، اذا كان ايراد المبيعات $ع س_ك$ مقدارا ثابتا .

الافتراضات الأساسية للبرمجه الخطية لنماذج الانتاج :

مما سبق يتضح أنه لكى يمكن حل مشاكل تخطيط الانتاج بطريقة البرمجه الخطية يجب أن تتحقق بعض الافتراضات الاساسية . أولها أن تكون الشروط الجانبية التى على أساسها نبحث عن الحل الامثل ، قابلة للصياغة فى صورة خطية . ويستتبع ذلك أن تكون العلاقات متجانسة وقابلة للجمع . فالعلاقات التى تربط بين المدخلات والمخرجات ، والتى تمثل الطرق الفنية للانتاج ، يجب أن تكون من الممكن تفسيرها بعدد من العمليات أو الانشطة الخطية ، كل منها يعرف بمجموعة من المعاملات الفنية الثابتة ، بحيث ينتج عن أى تغيير فى المدخلات تغيير بنسب مماثلة فى المخرجات . هذا هو شرط تجانس العلاقات ، أما شرط القابلية للجمع فيعنى أنه يمكن استخدام العمليات أو الانشطة المختلفة فى وقت معا دون أن يؤثر ذلك على قيم معاملات هذه الانشطة .

كذلك يجب أن يكون فى الامكان صياغة معيار الامثلية فى صورة دالة خطية فى نفس المتغيرات .

مشكلة خلط المدخلات

سنأخذ هنا مثالا بسيطا لتوضيح مشكلة اختيار نسب معينة من المدخلات للحصول على كمية محددة فى الناتج فى أى سلعة . لنفرض أن مصنعا للبيرة طلب منه أن يقوم فى الحال بتوريد ١٠٠ جالون من بيرة بدرجة تركيز الكحول فيها ٤٪ . ولما كان هذا النوع غير موجود فى المخازن للتسليم الفورى ، فان المصنع يقوم باعداد خليط من الانواع الموجودة لديه بحيث يحقق هذا الخليط المواصفات المطلوبة .

وقد وجد المصنع أن لديه بالمخازن أربعة أنواع من البيرة يمكن استخدامها فى عملية الخلط ، كما يمكن أيضا اضافة الماء لتخفيف المحلول اذا أقتضى الامر . والجدول الاتى يعطى نسبة الكحول فى المركبات الخمسة التى يمكن استخدامها فى الخليط ، كما يعطى أيضا أسعار هذه المركبات .

	١	٢	٣	٤	٥	مواصفات الناتج
نسبة الكحول (فى المائة)	—	٢ر٥	٧ر٣	٥ر٤	٨ر٥	٤ر٠
السعر	—	٢٢ر٠	٢٥ر٠	٣٢ر٠	٤٥ر٠	

والمشكلة الآن هى ايجاد الخليط الذى يعطى أقل تكلفة ممكنة .

بفحص الجدول نجد أن الانواع الثلاثة الاولى تشتمل على نسبة من الكحول أقل من ٤٪ ، بينما يشتمل النوعان الاخيران على أكثر من هذه النسبة . ولهذا فانه من الواضح أن الخليط يجب أن يشتمل على نوع واحد على الاقل من كل من المجموعتين . لنحاول — على سبيل المثال — أن نمزج النوع الاول (الماء) مع النوع الرابع . ونفرض أن $س_1$ ، $س_4$ هما الكميتان الواجب أخذهما من هذين العنصرين ، فيكون $س_1 + س_4 = ١٠٠$

$٤٥ر٠ س_4 = ٤٠ر٠ (س_1 + س_4)$ أو $٥ر٤ س_4 = ٤٠٠$

حيث تمثل المعادلة الاولى شرط أن يكون اجمالى الناتج من الخليط ١٠٠ جالون ، بينما تحدد المعادلة الثانية قوة تركيز الكحول فى الناتج . وبحل هاتين المعادلتين نجد أن

س٣ = ١١ر١١ جالون ، س٤ = ٨٨ر٨٩ جالون

وتكون التكلفة للمائه جالون من الخليط

ك = ٣٢ر٠ س٤ = ٢٨ر٤٤ جنيها

(حيث أن تكلفة الماء يمكن اهمالها فى حساب التكلفة الكلية) .

وبنفس الطريقة يمكننا أن نحسب كل طرق الخلط الاخرى ، آخذين فى كل مرة نوعا واحدا من كل مجموعة . فنجد أن الحل الذى يعطى أقل تكلفة ممكنة هو :

س٣ = ٦٢ر٥ ، س٤ = ٣٧ر٥ ، ك = ٢٧ر٦٣ جنيها

من الواضح أن كل خليط يمكن النظر اليه على أنه حل غير سالب لنموذج المعادلات .

س١ + س٢ + س٣ + س٤ + س٥ = ١٠٠

٠ر٥ س١ + ٥ر٢ س٢ + ٣ر٧ س٣ + ٥ر٤ س٤ + ٨ر٥ س٥ = ٤٠٠

فاذا أخذنا نوعين من الخليط فى كل مرة ، فان هذا يعنى أن المتغيرات الثلاثة الاخرى تساوى الصفر فى المعادلتين السابقتين . والواقع أن النظرية الاساسية للبرمجه الخطية تعفينا من أن نبحث امكانية خلط أكثر من نوعين من الانواع الخمسة ، حيث أن النموذج يشتمل على معادلتين فقط . وبهذا فان الحل السابق الذى اشتمل على س٣ ، س٤ هو حل أمثل .

الاستخدام الامثل لطاقة الالات :

غالبا ما يحدث أن يقوم المشروع الصناعى بانتاج عدد من السلع التى يتم تصنيعها على مختلف الالات . ومن الطبيعى أن لهذه الالات طاقة انتاجية محدودة ، ويتعين علينا أن نحدد ما يجب انتاجه من كل سلعة بحيث نصل بالربح الى أقصى قيمة ممكنة ، وبحيث يكون الانتاج فى

حدود طاقة الالات . أى أننا نسعى لايجاد برنامج ممكن للانتاج بحيث يمثل هذا البرنامج الاستخدام الامثل للمعدات الثابتة للمشروع . ومن الواضح أن هذه المشكلة يمكن حلها باستخدام البرمجه الخطية ، اذا ما توفرت الشروط الخطية المعتادة .

مثال : نفرض أن مصنعا لانتاج السيارات يقوم بانتاج سيارات نقل وسيارات ركوب . ويشتمل المصنع على أربعة أقسام كل منها له طاقة محدودة : القسم الاول هو قسم تشكيل الصاج ويمكن أن ينتج الصاج اللازم لـ ٣٥٠٠٠ سيارة نقل أو ٢٥٠٠٠ سيارة ركوب فى الشهر . أى أن سيارة النقل تحتاج لجزء قدره $\frac{1}{35000}$ وسيارة الركوب تحتاج لجزء قدره $\frac{1}{25000}$ من القدرة الانتاجية لهذا القسم فى الشهر . ويمكن كتابة هذا القيد على القدرة الانتاجية كمايلى :

$$\frac{1}{35000}\,س_1 + \frac{1}{25000}\,س_2 \leq 1$$

حيث $س_1$ ، $س_2$ هما على الترتيب عدد سيارات النقل وسيارات الركوب المنتجة فى الشهر . أما القسم الثانى فهو قسم تجميع الماكينات ، ويمكنه أن ينتج ١٦٦٦٧ سيارة نقل أو ٣٣٣٣٣ سيارة ركوب فى الشهر . ويختص القسم الثالث بالتجميع النهائى لسيارات الركوب بطاقة قصوى ٢٢٥٠٠ سيارة فى الشهر ، بينما يتم تجميع سيارات النقل فى القسم الرابع بحد أقصى ١٥٠٠٠ سيارة فى الشهر .

وبهذا تكون لدينا المشكلة الاتية فى البرمجه الخطية :

	نوع السلعة		
	١	٢	
قسم ١	$\frac{1}{35000}$	$\frac{1}{25000}$	≤ 1
٢	$\frac{1}{16667}$	$\frac{1}{33333}$	≤ 1
٣		$\frac{1}{22500}$	≤ 1
٤	$\frac{1}{15000}$		≤ 1
	٢٥٠	٣٠٠	= د = نهاية عظمى

حيث معاملات دالة الربح ٢٥٠ ، ٣٠٠ هما سعر البيع مطروحا منه التكلفه المتغيرة بالنسبة لوحدة واحدة من السلعة . (يمكن اهمال التكلفه المتعلقة بالمعدات الثابتة ، حيث أنهـــا تكلفة ثابتة لا تؤثر على أمثلية الحل .)

تمرين : حل المثال السابق باستخدام طريقة السمبلكس للحصول على الكمية التى يجـــب انتاجها من سيارات النقل وسيارات الركوب بحيث يحقق المشروع أكبر عائد ممكن .

وتتميز بعض مشكلات الاستخدام الامثل لطاقة الالات بقيود اضافية فى صورة حدود عليـــا أو حدود دنيا على قيمة المتغيرات س١ ، س٢ ، ... الخ . فكما قلنا من قبل ، قد تكـــون لدينا حدود عليا مبنية على توقعات المبيعات ، أو حدود دنيا مبنية على أساس أوامر التوريد الـــتى يتعين على المشروع القيام بتنفيذها . ويمكن أيضا تعميم النموذج لحالة امكانية انتاج السلعـــة بأكثر من طريقـــة .

القسم الثالث

التقدير الاحصائى لدوال الانتاج

تمثل دالة الانتاج لمشروع صناعى معين القيود الفنية التى تخضع لها عملية الانتاج . فهى تحدد كمية الناتج الذى نحصل عليه من أى تركيب لعناصر الانتاج المستخدمة . وسنقتصر بحثنا فى هذه المعالجة الاحصائية على الحالة الخاصة التى ينتج فيها المشروع ناتجا واحدا يرمز لكمية بالرمز ك . ويدخل فى انتاجه عنصران فقط من عناصر الانتاج هما العمل ورأس المال ، نرمز لهما على التوالى بالرمزين ع ، م . ونكتب دالة الانتاج على الصورة :

$$ك = د (ع ، م) \qquad (١)$$

وفى العادة نقوم بوضع فروض معينة على شكل الدالة . وقد وجد أن دالة كوب دوجلاس هى من أنسب الصور لدوال الانتاج فى حالات عديدة ، حيث تأخذ هذه الدالة الصورة :

$$ك = أ \, ع^{\alpha} م^{\beta} \qquad (٢)$$

حيث أ ، α ، β ثوابت غير معروفة القيمة ، نقوم بتقديرها احصائيا .

ويمكن تحويل هذه الصورة للدالة الى علاقة خطية بأخذ لوغاريتمات المتغيرات كما يلى :

$$لو ك = \alpha لو ع + \beta لو م + \gamma \qquad (٣)$$

حيث $\gamma = لو أ$.

وكثيرا ما يفترض أن المشروعات داخل قطاع صناعى معين تخضع لشروط فنية متشابهة ، وبالتالى تخضع لنفس دالة الانتاج . ويجرى تقدير معالم الدالة α ، β ، γ بأخذ

بيانات من المشاهدات على المتغيرات ك ، ع ، م في عدد من المشروعات داخل القطاع وتطبيق تحليل الانحدار المتعدد على هذه المتغيرات . على أن هذا النوع من الدراسة قد وجه اليه الكثير من الانتقادات . فحيث أن المشروعات المتعددة داخل القطاع الواحد ليس لها في الواقع نفس دالة الانتاج ، فانه يجب أن نبدأ بالقول بأن المنشأة تخضع لدالة الانتاج

$$\text{لو ك}_{ر} = \alpha \text{ لو ع}_{ر} + \beta \text{ لو م}_{ر} + \gamma + \xi_{1ر} \quad (٤)$$

$\xi_{1ر}$ يمكن اعتبارها هنا متغيرا عشوائيا توقعه الصفر ، تضيفه للمعادلة لأنه ليس لدينا علم بتأثير الفروق بين الشروط الفنية التي يخضع لها المشروع ر والشروط الفنية التي تخضع لها المشروعات الاخرى في نفس القطاع .

وقد يبدو لأول وهلة أنه يمكن تطبيق الانحدار المتعدد[1] على العلاقة (٤) على أن تحليل الانحدار يفترض أن تكون المتغيرات التفسيرية على الجانب الايسر من المعادلة (لو ع$_{ر}$ ، لو م$_{ر}$) متغيرات خارجية مستقلة . بمعنى أن هذه المتغيرات تؤثر في المتغير التابع ك$_{ر}$ ولكنها لا تتأثر به . وبفحص المعادلة (٤) نجد أن هذا الشرط لا يتحقق ، اذ لا يمكن القول بأن العمل ورأس المال لا يتأثران بكمية الناتج من السلعة في القطاع الذي تشمله الدراسة . فمثل هذا القول يكون صحيحا لو أن كميات عناصر الانتاج تحددت سلفا في دراسة تجريبية لما ستكون عليه كمية الناتج ، لكن الذي يحدث في الواقع العملي يختلف عن هذا الافتراض اختلافا بينا ، حيث تتشابك المتغيرات الثلاثة في دالة الانتاج السابقة بحيث يؤثر أي من هذه المتغيرات على المتغيرين الاخرين ويتأثر بهما في نفس الوقت . فليست هناك علاقة سببية في اتجاه واحد وانما علاقة ارتباط متعددة الاتجاهات .

وبعدم تحقق هذا الفرض الاساسي الذي يقوم عليه تحليل الانحدار ، يجب أن نبحث عن طريقة بديلة لتقدير معالم دالة الانتاج التي تتحدد فيها قيم المتغيرات في وقت معا .

---

(١) هذا الجزء يفترض المام الطالب بتحليل الانحدار الذي اشتمل عليه مقرر الاحصاء في الدورة التمهيدية .

وفى حالات معينة قد يجد المشروع نفسه فى موقف يختلف كثيرا عن موقف المشروعات الاخرى من ناحية استخدامه لعناصر الانتاج ، وبالتالى ستختلف نماذج الانتاج التى تمثل هذه المشروعات .

لنفترض أن القطاع الصناعى الذى نقوم بدراسته يشتمل على عدد من المشروعات الخاصة وأن الاسواق الخاصة بالناتج من هذا القطاع وبعناصر الانتاج تسودها المنافسة . فى هذه الحالة يكون هناك سعر يحدده السوق للناتج من هذا القطاع ، ونرمز لهذا السعر بالرمز س كما يكون هناك سعر لعنصر الانتاج ع وعنصر الانتاج م نرمز لهما على التوالى بالرمزين ج ، ف . وحيث يسعى المشروع الرائى للوصول بالعائد (الربح) الى أقصى قيمة ممكنة فانه يختار ك$_{ر}$ ، ع$_{ر}$ ، م$_{ر}$ بحيث تكون الانتاجية الحدية لعنصرى الانتاج مساوية لـ $\frac{ج}{س}$ ، $\frac{ف}{س}$ على الترتيب . وهذا يعنى بالنسبة لدالة الانتاج (٢) ، أن الانتاجية الحدية لعنصر العمل فى المشروع الرائى يجب أن تساوى

$$\frac{\partial ك_{ر}}{\partial ع_{ر}} = أ_{ر} م_{ر}^{\beta} (\alpha ع_{ر}^{\alpha-1}) = \frac{ج}{س}$$

أى أن $$\alpha \left(\frac{ك_{ر}}{ع_{ر}}\right) = \frac{ج}{س}$$

أو $$(لو ك_{ر} - لو ع_{ر}) + لو \alpha = لو \frac{ج}{س} \quad (٥)$$

بالمثل فالانتاجية الحدية لعنصر رأس المال يجب أن تساوى

$$\frac{\partial ك_{ر}}{\partial م_{ر}} = أ_{ر} ع_{ر}^{\alpha} (\beta م_{ر}^{\beta-1}) = \frac{ف}{س}$$

أى أن $$\beta \left(\frac{ك_{ر}}{م_{ر}}\right) = \frac{ف}{س}$$

ومنها $$(لو ك_{ر} - لو م_{ر}) + لو \beta = لو \frac{ف}{س} \quad (٦)$$

وحيث أن الادارة فى أى مشروع لا يمكن لها أن تكون تامة الكفاءة فى اتخاذ وتنفيذ قراراتها ، فاننا نتوقع أن تحدث بعض الفروق بين طرفى المعادلة ، بحيث يكون بعضها موجب والبعض الاخر سالب . لهذا فاننا نضع المعادلتين (٥) ، (٦) على الصورة :

$$\text{لو } ك_{ر} - \text{لو } ع_{ر} = \text{لو } \frac{ج}{\alpha س} + \xi_{٢ر} \qquad (٧)$$

$$\text{لو } ك_{ر} - \text{لو } م_{ر} = \text{لو } \frac{ف}{\beta س} + \xi_{٣ر} \qquad (٨)$$

حيث $\xi_{٢ر}$ ، $\xi_{٣ر}$ متغيران عشوائيان توقعهما يساوى الصفر .

فى هذه الحالة تتحدد المتغيرات لو $ك_{ر}$ ، لو $ع_{ر}$ ، لو $م_{ر}$ بالمعادلات (٤) ، (٧) ، (٨) . فاذا كانت المشروعات كلها تدار بلا أخطاء ، وكانت تستخدم نفس النسب من عناصر الانتاج (أى أن لجميعها نفس دالة الانتاج) ، فان المتغيرات الثلاثة تأخذ نفس القيم بالنسبة لجميع المشروعات ، ولا تسمح لنا العينة بتحليل انحدار $ك_{ر}$ على $ع_{ر}$ ، $م_{ر}$

ووجود الحدود العشوائية $\xi_{١ر}$ ، $\xi_{٢ر}$ ، $\xi_{٣ر}$ يفسر سبب التباين فى النتائج المشاهدة بين المشروعات المختلفة .

على أن افتراض المنافسة الكاملة هنا افتراض غير واقعى ، وربما كان من الاهم أن ندرس حالة أخرى لا تتحقق فيها المنافسة . لنأخذ مثلا حالة قطاع خدمة عامة ، تضطر فيه المشروعات المختلفة أن تعرض هذه الخدمة بسعر تحدده الدولة ، وتكون الكمية المنتجة فى المشروع الرائى $ك_{ر}$ محددة سلفا ، بينما تتحدد الكميات المستخدمة من عنصرى الانتاج بحيث تجعل تكلفة الانتاج أقل ما يمكن . كذلك نفترض أن المشروعات قائمة فى اماكن متفرقة تختلف بينها أسعار العناصر $ج_{ر}$ ، $ف_{ر}$

ومن دالة الانتاج المعطاه نجد أن الوصول بسعر التكلفة الى أدنى قيمة يعنى أن تكون

$$\frac{ج_{ر} \; ع_{ر}}{\alpha} = \frac{ف_{ر} \; م_{ر}}{\beta}$$

وهذا الشرط يمكن كتابته على الصورة :

$$لو \; ع_{ر} - لو \; م_{ر} = لو \frac{\alpha \; ف_{ر}}{\beta \; ج_{ر}} \qquad (٩)$$

وبهذا تكون لدينا المعادلات الهيكلية (٣) ، (٩) التى تعطى المتغيرات الداخلية $ع_{ر}$ ، $م_{ر}$ كدالة فى المتغيرات الخارجية $ك_{ر}$ ، $ف_{ر}$ ، $ج_{ر}$. كذلك نعرف سعر تكلفة السلعة المنتجـــة .

$$ت_{ر} = ج_{ر} \; ع_{ر} + ف_{ر} \; م_{ر}$$

وباستخدام هذه العلاقة والمعادلتين (٣) ، (٩) نستطيع أن نحصل بعمليـــات طويلة من الجبر البسيط على العلاقة

$$لو \; ت_{ر} = \frac{١}{\beta + \alpha} لو \; ك_{ر} + \frac{\alpha}{\beta + \alpha} لو \; ج_{ر} + \frac{\beta}{\beta + \alpha} لو \; ف_{ر} + \lambda + خ_{ر}$$

(١٠)

حيث λ مقدار ثابت (دالة فى α ، β ، γ) ، $خ_{ر}$ متغير عشوائى يمثـــل الخطأ ويساوى $خ_{ر} = \frac{١}{\beta + \alpha} \delta_{ر}$

والعلاقة (١٠) تعطينا المتغير الداخلى لو $ت_{ر}$ كدالة خطية فى متغيرات تعتبر كلها خارجية ، أى أنها لا تتأثر بالمتغير لو $ت_{ر}$. وحيث أن المعاملات الثلاثـــة للمتغيرات الخارجية تعتمد علـــى معاملين فقط هما α ، β فاننا لا يمكننا أن نطبـــق تحليل الانحدار مباشرة على هذه المعادلة ، وانما يتعين تقدير قيمة المعاملات ، بحيث نحصل

على أصغر قيمة لمجموع مربعات الخطأ في المعادلة ، آخذين في الاعتبار القيود التي تحدد العلاقة بين هذه المعاملات . على أنه اذا أمكن القول بأن سعر أحد العناصر ـ وليكن ف ـ ثابتا بالنسبة لكل المشروعات ، فانه يمكن في هذه الحالة تطبيق تحليل الانحدار بطريقة مباشرة .

المراجـــــع

تعتمد هذه المذكرة على المراجع الآتية :

1- Arrow, K.J. and Hoffenberg, M., A Time Series Analysis of Interindustry Demand. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1959.

2- Chenery, H.B. and Clark, P.G., Interindustry Economics, John Wiley, New York, 1959.

3- Dans, Sven, Linear Programming in Industry, Springer-Verlag, View, 1963.

4- Lange, Oscar, Introduction to Econometrics, Pergamon Press, 1962.

5- Malinvaud, E., Statistical Methods of Econometrics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966.