الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومي

مذكرة داخلية رقم ١٢١

مشكلة التوزيع الامثل للموارد على مراكز الاستهلاك
(مشكلة النقل)

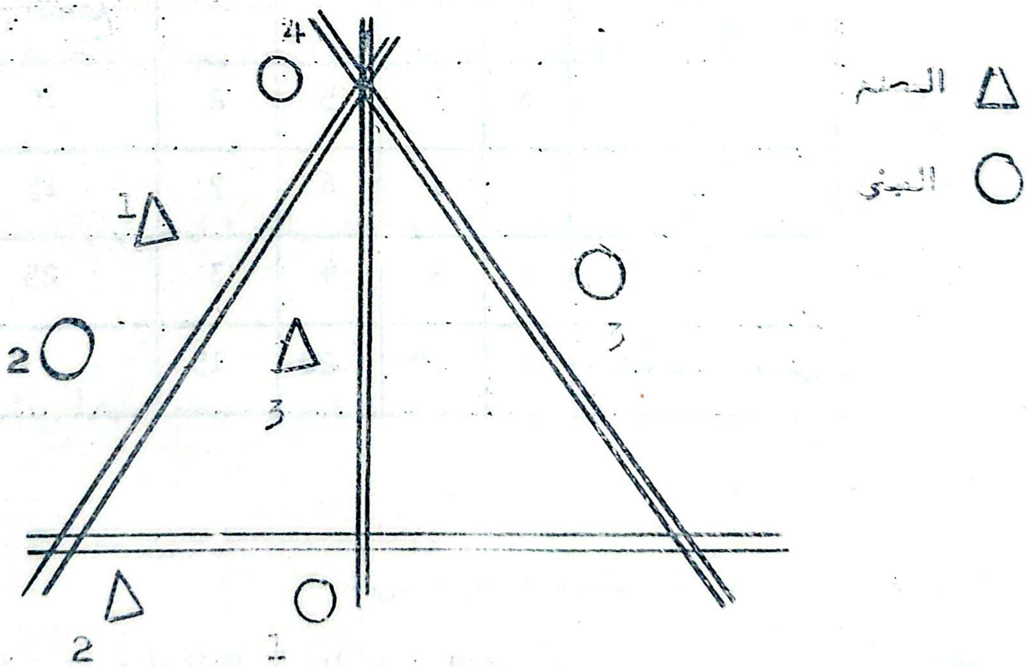
اعداد
دكتور يوسف نصر الدين
دكتور مهندس فايز فرج غبريال

فبراير ١٩٧١

القاهرة

تظهر عادة عند تخطيط عمليات النقل مشكلة معرفة أفضل السبل لتنظيم هذه العمليات : كيف يمكن نقل المواد الخام من مصادرها المختلفة الى أماكن التصنيع بأقل تكلفة ممكنة ؟ أو كيف يمكن نقل المنتجات من أماكن التصنيع الى مراكز التوزيع بأقل تكلفة ممكنة ؟ وهذا يعني بالضرورة تحديد برنامج محدد لهذه العمليات ، بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن . وقد يحدث أن يكون العامل المهم في عمليات النقل هو الزمن ولا سيما عند نقل المنتجات سريعة التلف فانه يلزم توصيلها الى مراكز توزيعها في أقصر فترة ممكنة ، فمثلا في موسم الحصاد نجد أن العامل المهم في مساعدة تجهيز المحصول هو ايجاد أسرع طريقة لنقله الى مراكز التجهيز .

نفترض أن المطلوب هو نقل مواد البناء من ثلاثة مصانع الى أربعة أماكن للبناء وذلك باستخدام خطوط السكك الحديدية كما في الرسم شكل (١) :



نفترض أن عمليات البناء الاربعة تحتاج الى :

المبنى الأول يحتاج الى 5 عربات مملوءة بمواد البناء خلال ربع سنة

المبنى الثاني يحتاج الى 10 عربات مملوءه بمواد البناء خلال ربع سنه

المبنى الثالث يحتاج الى 20 عربه مملوءه بمواد البناء خلال ربع سنه

المبنى الرابع يحتاج الى حموله 15 عربه مملوءه بمواد البناء خلال ربع سنه

وفيما يختص بامكانيات المصانع المختلفه لانتاج مواد البناء فان المصانع الثلاثه تنتج فى ربع سنة حمولة 10 ، 15 ، 25 عربه مملوءه على الترتيب ويمكن كتابة هذه البيانات ٠ وتكاليف النقل للعربه الواحدة من المصنع الى المبنى فى الجدول التالى :

جدول (١)

المبانى / المصانع	1	2	3	4	انتاج المصنع
1	8	3	5	2	10
2	4	1	6	7	15
3	1	9	4	3	25
احتياجات المبانى	5	10	20	15	

من البيانات السابقة يمكن وضع خطه النقل فى الجدول التالى :

جدول (٢)

المباني / المصانع	1	2	3	4	انتاج المصنع
1	8 5	3 5	5	2	10
2	4	1 5	6 10	7	15
3	1	9	4 10	3 15	25
احتياجات المباني	5	10	20	15	

وطبقا لهذه الخطة فان المصنع الأول يمد عملية البناء رقم 1 بخمسة عربات ويمد عمليـــة البناء رقم 2 بخمسة عربات .

والمصنع الثانى يمد عملية البناء رقم 2 بخمسة عربات ، ويمد عملية البناء رقم 3 بعشـــرة عربـــات .

والمصنع الثالث يمد عملية البناء رقم 3 بعشرة عربات ويمد عملية البناء رقم 4 بخمسة عشـرة عربـــه .

وطبقا لهذا البرنامج فان تكاليف النقل هـى :
وحدة نقديه

$$(5)(8) + 5(3) + 5(1) + (10)(6) + (10)(4) + (15)(3) = 205$$

وهنا نتساءل هل هذا البرنامج هو الامثل ؟ ويمكن التأكد من أنه ليس بالبرنامج الأمثـــل حيث أن البرنامج التالى يكون أقل منه من ناحية التكاليف

جدول (٣)

المبانى / المصانع	1	2	3	4	انتاج المصنع
1	8	3	5	2 / 10	10
2	4	1 / 10	6 / 5	7	15
3	1 / 5	9	4 / 15	3 / 5	25
احتياجات المبانى	5	10	20	15	

وتكاليف النقل طبقا لهذا البرنامج هى

وحدة نقديه $2(10) + 5(6) + 10(1) + 5(3) + 4(15) + 1(5) = 140$

وطبقا لهذا البرنامج فانه يجب تنظيم عمليات النقل على الكيفيه التاليه :

ينقل جميع انتاج المصنع الأول الى عملية البناء رقم 4

ينقل من انتاج المصنع الثانى عشرة عربات لعملية البناء رقم 2 وخمسة عربات لعملية البناء رقم 3

ينقل من المصنع الثالث خمسة عربات لعملية البناء رقم 1 وخمسة عشر لعملية البناء رقم 3 والخمسة عربات الباقية لعملية البناء رقم 4 •

ونتساءل هنا هل هذا البرنامج هو البرنامج الامثل ؟ بمعنى أن تكاليف النقل هى أصغـر

التكاليف • اذا لم يكن هذا البرنامج هو الامثل فكيف يمكن ايجاد البرنامج الذى يحقق أقل تكاليف ؟ ولكى نجيب على هذا التساؤل يجب أولا وقبل كل شيء صياغة المشكلة فى صورتها الرياضيه العامـــه •

نفرض أن $a_i \; (i = 1, \ldots, m)$ هى عدد الوحدات الموجوده داخل مركز التوزيع i والتى عددها m

وان $b_j (j = 1, \ldots n)$ عدد الوحدات اللازمة لمكان الاستهلاك j والتى عددها n

c_{ij} ـ تكاليف نقل وحدة المواد من مركز التوزيع i الى مكان الاستهلاك j

والمطلوب تخطيط عملية النقل بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن •

لذلك نفرض أن x_{ij} هى عدد وحدات المواد التى نريد (طبقا للخطة الموضوعه) نقلها مــــن مركز التوزيع i الى مكان الاستهلاك j وتكون الكميات التى تنقل من جميع مراكز التوزيع m تساوى كمية المواد التى تحتاجها أماكن التوزيع n

أى أن
$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وفى حالــــة
$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

فانه يضاف مكان استهلاك افتراضى يستهلك الكمية
$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$$

وبحيث تكون $c_{i\,b+1} = 0$ لجميع قـــيم i

أما فى حالة
$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i > 0$$

فانه يضاف مركز توزيع افتراضى يوزع الكميه

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1}$$

وبحيث تكون $c_{m+1,j}$ 0 لجميع قيم j

ويمكن تلخيص البيانات السابقة فى الجدول التالى :

جدول (٤)

مراكز الاستهلاك / مراكز التصنيع	1	2	...	j	...	n	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{ij}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	....	....	...	....	...	....	⋮
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
⋮			...		...		⋮
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_n
احتياجات مراكز الاستهلاك	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	

وتكون المشكلة فى صورتها الرياضية على الوجه التالى

ايجاد قيم x_{ij} الوجبه التى تجعل دالة التكاليف

$$c = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

أقل ما يمكن تحت الشروط التاليــــة

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad (2)$$

الشرط (١) يعنى أن كل المواد تشحن من مركز التصنيع i

والشرط (2) يعنى أن احتياجات مركز الاستهلاك j تحقق كامله •

والآن نفترض أن ما يهمنا فى تخطيط عملية النقل هو الحصول الى أقصر فترة ممكنه لتوصيـل جميع المواد الى أماكن التوزيع وسندرس نفس المثال السابق الموجود فى جدول (١) ولكن بـدلا من التكاليف c_{ij} فاننا سنأخذ فى الاعتبار الزمن t_{ij} (بالايام أو الساعات) الذى يلـزم لنقل المواد من مركز التوزيع i الى مركز الاستهلاك j ومن السهل التأكد من أن الحـل الذى تكون فيه الداله الخطيه

$$\sum \sum t_{ij} x_{ij} \qquad (3)$$

نهاية صغرى لا يكون هو الحل الامثل من ناحية الوقت فمثلا نجد فى المثال السابق أن البرنامج الموضح فى الجدول (3) يحقق أقل قيمة للداله (3) كما يتضح منها أن عمليـة النقل لا تتم قبل ستة أيام فى حين أن بديل العملية الموضحة فى الجدول التالى يقابلها قيمـة أكبر بعض الشئ للداله (3) ولكن يمكن توصيل المواد الى مراكز استهلاكها خلال أربعة أيام فقط

جدول (٥)

مراكز الاستهلاك / مراكز التوزيع	1	2	3	4	المتاح
1	8	3	5	2 10	10
2	4 5	1 10	6	7	15
3	1	9	4 20	3 5	25
احتياجات الاستهلاك	5	10	20	15	

عند نقل المنتجات سريعه التلف فان التكاليف الاضافيه التى تصرف بغرض زيادة سرعة العربات والمكيفه آليا (مثلا) يمكن تعويضها عن طريق الحفاظ على جودة الآف الاطنان من المنتجات المرسله الى مراكز الاستهلاك ٠

ونلاحظ أن مشكلة النقل عند حلها بعامل الزمن لا تتحول مباشرة الى مشكلة برمجة خطية بل تصبح مشكلة النهايات الصغرى للنهايات العظمى Min Max كما أن حل مثل هذه المشاكل (كما سيتضح فيما بعد) يمكن الحصول عليه فى حدود طرق البرمجه الخطية ٠

طريقة حل مشكلة النقـــــل :

يؤول كثير من مشاكل التوزيع الى الصورة الرياضية التالية :

ايجاد قيم x_{ij} الموجبه التى تجعل الداله

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \; x_{ij} \qquad (1)$$

نهاية صغرى تحت القيود التالية

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

وتكون المصفوفه $X = \{x_{ij}\}$ التى درجتها $m \times n$ والتى تحتوى على القيم الموجبه x_{ij} حلا لمشكلة التوزيع والحل الذى يحقق (1) , (2) يسمى بالحل الامثل . وبما أن مشكلة النقل ما هى الا مشكلة برمجة خطية فان مجموعة الحلول الممكنة X تحدد بكثير الاضلاع كما وأن رؤس هذا المضلع كثير الحدود هى الحلول الاساسيه ويكون الحل الامثل هو أحد رؤوس هذا المضلع الذى يحقق (1) , (2)

وتنحصر طريقة تعيين الحل الامثل فى أنه عندما نبدأ من أى حل أساسى ابتدائى فاننا ننتقل على التوالى الى حل أساسى آخر يحتوى على قيمة أقل (أكبر) للمعادلة (1) . وبعد عدد محدد من مثل هذه الخطوات فاننا سنحصل على الحل الامثل . والآن كيف نبدأ بالحل الاساسى الابتدائى ؟ . نعين قيم X فى الصف الأول وذلك بأن نبحث فى الصف الأول عن أقل قيمة للمصفوفه $\{c_{ij}\}$ ونفرض أن هذه القيمة هى c_{1j} . وبذلك نضع

$$x_{1j} = \min (a_1, b_{j_1})$$

فاذا كانت $a_1 > b_j$ فاننا نبحث فى نفس هذا الصف عن أقل قيمة تكون للعنصر c_{ij_2} الذى يحقق الشرط $c_{1j_2} \geqslant c_{1j_1}$ ثم نضع

$$x_{1j_2} = \min (a_1 - x_{1j_1} , b_{j_2})$$

ثم نستمر فى هذه الخطوات الى أن نتمكن تماما من تحقيق العلاقة $\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1$

فاذا اتضح عند خطوة معينة أن المتبقى من a_1 يساوى تماما b_{j_k} التى تناظـــــره فاننا نضع x_{1j_k} لتساوى هذا المتبقى أى أن $x_{1j_k} = b_{j_k}$

وبعد ذلك نوجد القيمة الصغرى التالية $c_{1j_{k+1}}$ ونضع $x_{1j_{k+1}} = 0$

ننتقل بعد ذلك الى الصف الثانى مع اجراء الخطوات السابقة والصف الثالث ... الخ .
وهنا نبحث عن أقل العناصر c_{ij} بين تلك الأعمدة التى لم يتم بعد تحقيقها ونحصل بذلك على الحل الابتدائى الأساسى .

ولتوضيح ذلك نذكر المثال المذكور فى بداية هذه المذكرة والحل الابتدائى لهـــــذا المثال نضعه فى الجدول التالى :

المصادر \ الاستهلاك	1	2	3	4	المتاح
1	8	3	5	2 10	10
2	4 5	1 10	6 0	7	15
3	1	9	4 20	3 5	25
الكميات المطلوبه	5	10	20	15	

نجد أن أصغر عدد من الصف الأول من الاعداد (8 , 3 , 5 , 2) هو العدد 2 ولذلك نضع $x_{14} = \min (10 , 15)$ وبذلك يتضح أن طاقة المصدر الأول قد تم توزيعها تماما • وننتقل الى الصف الثانى ونبحث عن أصغر عدد من الأعداد (7 , 6 , 1 , 4) وهو العدد 1 ولذلك نضع

$$x_{22} = \min (15 , 10)$$

وبما انه يوجد لدينا باقى من المصدر الثانى وهذا الباقى يساوى $15 - 10 = 5$ فاننا نبحث فى نفس الصف عن العنصر الأصغر وهو 4 ثم نضع

$$x_{21} = \min (15 - 10, 5) = 5$$

ونلاحظ هنا أن الباقى $\Delta a = 5$ يتساوى تماما مع الاحتياجات $b_1 = 5$ ولذلك نبحث عن أصغر عدد فى نفس الصف وهذا العدد هو 6 ونضع $x_{23} = 0$ ثم ننتقل بعد ذلك الى الصف الثالث ونبحث عن أصغر عنصر بين العناصر (3 , 4 , 9 , 1) ويكون هذا العدد هو 1 الموجود فى تقاطع العمود الأول والصف والثالث وحيث انه أمكن الوفاء بالاحتياجات لمركز التوزيع الأول فاننا نبحث عن العنصر التالى الأصغر فى نفس الصف وهو 3 ونضع

$$x_{34} = \min (25, 15 - 10) = 5$$

وبعد ذلك نوجد أصغر عدد يليه في العمود الرابع ونفرض أن

$$x_{33} = \min (25 - 5, 20) = 20$$

ومن السهل التأكد من أن التوزيع الذي توصلنا اليه هو الحل وتكون التكاليف في هذه الحالة هي

وحدة تكاليف $C = 2(10) + 4(5) + 1(10) + 4(20) + 3(5) = 145$

وهذا هو أحد الحلول الأساسية وعدد العناصر التي اخترناها هي

$$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

ونلاحظ أنها لا تكون حلقة مقفلة ٠ كما أن اختيار أي خلية خالية يمكن أن تكون حلقة مقفلة ٠
نختار مثلا الخلية "12" فتكون الخلايا 14 , 34 , 33 , 22 , 12
حلقة مقفلة وذلك كما هو موضح في الجدول رقم (٦) نطلق على القيم c_{ij} والتي تقابلها
القيم المختارة x_{ij} بالقيم المختارة X

ولكي نحصل على حل أفضل سنرقم عناصر الحلقة المقفلة لعنصر ما من العناصر المختارة وذلك بأن نسير مثلا في اتجاه عقارب الساعة على أن يكون العنصر الذي لم نختاره هو الأول فيها ٠

ولكي نحدد هل الحل الذي توصلنا اليه هو الحل الأمثل فاننا سنأخذ مفهوم التحويل المتكافيء للمصفوفة $\{c_{ij}\}$

نفرض أن لدينا المصفوفة $\{c_{ij}\}$ وكذلك الاعداد الاختيارية
$D = \{d_{ij}\}$ تسمى المصفوفة $s_1, \ldots, s_n$, $r_1, \ldots, r_m$
بالمصفوفة المتكافئة للمصفوفة $\{c_{ij}\}$ اذا أمكن الحصول عليها باستخدام العلاقة

$$D = \{c_{ij} + r_i + s_j\}$$

وبما أن عناصر أي حل أساسي لا تكون مع بعضها حلقات مقفلة ٠ فانه يمكن بواسطة التحويل المتكافيء تحويل جميع عناصر X المختارة الى الصفر ٠ ولهذا يكفي مثلا بأن نضيف الى

عناصر كل عمود (أو صف) العدد الذي يختلف في العلاقة الجبرية عن مجموع الأعداد التي أضيفت سابقا للصف والعمود وقيم X المختارة التي تؤول الى الصفر .

نحول العناصر X المختارة في الجدول (٧) وذلك بطرح 4 من عناصر العمود الأول في المصفوفة $\{c_{ij}\}$ ونطرح من المصفوفة $\{c_{ij}\}$ في العمود الثاني العدد 1 ونتيجة لذلك فان العناصر X المختارة لهذه الأعمدة تؤول الى الصفر . نطرح 6 من عناصر العمود الثالث . وبذلك فان العنصر X المختار الموجود في تقاطع الصف الثاني والعمود الثالث يؤول الى الصفر أما العنصر الذي يوجد في تقاطع الصف الثالث والعمود الثالث فتصبح قيمته $2 - = 6 - 4$.

نضيف الى عناصر الصف الثالث العدد 2 أما بالنسبة الى عناصر العمود الرابع فاننا نطرح العدد 5 . وبذلك فان العناصر الموجودة عند تقاطع الصف الثالث مع العمودين الثالث والرابع تصبح صفرا . ويتبقى أخيرا أن يؤول العنصر المختار X الذي يقع عند تقاطع الصف الأول والعمود الرابع الى الصفر . ولذلك يجب اضافة 3 الى عناصر الصف الأول . ونتيجة لهذا التحويل المتكافىء للمصفوفة $\{c_{ij}\}$ نحصل على الجداول التالية .

a_i \ b_j	1	2	3	4	المتاح
1	8	3	5	2 10	10
2	4 5	1 10	6 0	7	15
3	1	9	4 20	3 5	25
المطلوب	5	10	20	15	

a_i \ b_j	1	2	3	4	المتاح
1	7	5	2	0 10	10
2	0 5	0 10	0 0	2	15
3	-1	10	0 20	0 5	25
المطلوب	5	10	20	15	

فاذا آلت جميع عناصر x المختارة الى الصفر للمصفوفة المحولة $\{c_{ij}\}$ وكانت جميع العناصر الأخرى في المصفوفة غير سالبة ، فان الحل المذكور يكون دائما هو الحل الأمثل . أما اذا وجد ولو عنصر سالب واحد فان الحل ليس بالأمثل وكما نلاحظ فان الجدول (٨) يحتوى على عنصر سالب (-1) ولذلك فان الحل لا يعتبر حلا أمثلا ، وفى هذه الحالة ننتقل الى حل أساسى آخر نحصل عنده للدالة

$$c = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

على قيمة أقل .

أى لا يجب أن تكون قيمتها أكبر من قيمتها فى الحل السابق . وللحصول على هذا الحل فاننا نبحث فى المصفوفة المحولة عن أكبر عنصر سالب ونكون له الحلقة المقفلة الوحيدة مع عناصر x المختارة ثم نوجد أصغر عنصر مختار $x_{ij\,min}$ ثم ننقله الى النصف الفردى بالحلقة . وهذا يعنى أن مصفوفة الحل $X = \{x_{ij}\}$ ستتحول أيضا الى مصفوفة الحل $X' = \{x'_{ij}\}$ حيث

$x'_{i_1j_1} = 0 + x_{ij_{min}}$, $x'_{i_2j_2} = x_{i_2j_2} + x_{ij_{min}}$, ...

$x'_{i_tj_t} = x_{i_tj_t} + x_{ij_{min}}$; $x'_{i_1j_2} = x_{i_1j_2} - x_{ij_{min}}$

$x'_{i_2j_3} = x_{i_2j_3} - x_{ij_{min}}$; $x'_{i_tj_1} = x_{i_tj_1} - x_{ij_{min}}$

حيث i_1j_1 , ... , i_2j_2 , ... , i_tj_t هى خلايا النصف الفردى من الحلقة .

i_1j_2 , ... , i_2j_3 , ... , i_tj_1 هى خلايا النصف الزوجى من الحلقة .

كما أن i_1 , j_1 هى الخلية التى يوجد فيها أكبر (من ناحية القيمة المطلقة) عنصر سالب $c'_{i_1j_1}$ أما $x_{ij\ min}$ فهو أقل عنصر فى النصف الزوجى، ولكى نحصل على الحل الأساسى الآخر فانه يستلزم أن نستبعد من الأعداد المختارة تلك الخلية التى تحتوى على $x_{ij\ min}$ ونضع بدلا منها الخلية التى تحتوى على أكبر عنصر سالب c'_{ij} وبذلك فاننا نحصل على عدد $m + n - 1$ من الخلايا المختارة وبالتالى نحصل على $m + n - 1$ من العناصر المختارة .

نجرى بعد ذلك عملية التحويل المتكافىء على المصفوفة $C' = \{ c'_{ij} \}$ بنفس الطريقة السابقة بحيث تؤول جميع العناصر المختارة الى الصفر . ثم نتأكد من أن المصفوفة الجديدة تحقق شرط الامثلية . وبعد عدد محدد من الخطوات السابقة فاننا سنصل الى الحل الأمثل .

ولتوضيح ذلك نرى أن الجدول (٨) يحتوى على عنصر سالب واحد نكون الحلقة المقفلة لهذا العنصر السالب مع العناصر x المختارة ثم نضع الحل الثانى فى صورة الجدول التالى .

جدول (٩)

	1	2	3	4	المتاح
1	7	5	2	0 10	10
2	0	0 10	0 5	2	15
3	-1 5	10	0 15	0 5	25
المطلـــوب	5	10	20	15	

وبما أن العدد (-1) أصبح العدد X المختار فانه يجب أن يؤول الى الصفر ولذلك يجب أن تجرى عملية التحويل المتكافىء للمصفوفة $\{c_{ij}\}$ بأن نضيف الـــى عناصر العمود الأول في الجدول (٩) العدد الذى يساوى الوحدة فنحصل نتيجة لذلك علـى الجدول التالى .

جدول (١٠)

	1	2	3	4	المتـــاح
1	8	5	2	0 10	10
2	1	0 10	0 5	2	15
3	0 5	10	0 15	0 5	25
المطلـــوب	5	10	20	15	

ونلاحظ أنه فى هذا الجدول لا توجد عناصر سالبة كما أن جميع عناصر X المختارة صفرا • كما أن التكلفة فى هذه الحالة من الجدول (٧) ، (١٠) هى

$$C = 2(10) + 6(5) + 1.(10) + 3(5) + 4(15) + 1(5) = 140$$ وحدة نقدية

وعموما فان مشكلة ايجاد الحل الأمثل لمشاكل التوزيع يمكن أن تتم بالخطوات التالية :

(١) تكتب صورة المشكلة فى صورة جدول

(١) نوجد الحل الأول

(٣) نعمل على أن تؤول عناصر X المختارة الى الصفر • فاذا كانت العناصر الباقية للمصفوفة المحولة كلها موجبة فيكون هو الحل الأمثل •

(٤) اذا كانت توجد بعض العناصر السالبة فى حين أن جميع العناصر المختارة X تساوى أصفار فاننا نوجد أكبر عنصر سالب (من ناحية القيمة المطلقة) •

(٥) نكون الحلقة المقفلة لأكبر عنصر سالب مع عناصر X المختارة التى آلت الى أصفار ثم نوجد الحل الثانى وذلك بتحويل القيمة $x_{ij} \min$ وهى أصغر قيمة فى النصف الزوجى من الحلقة •

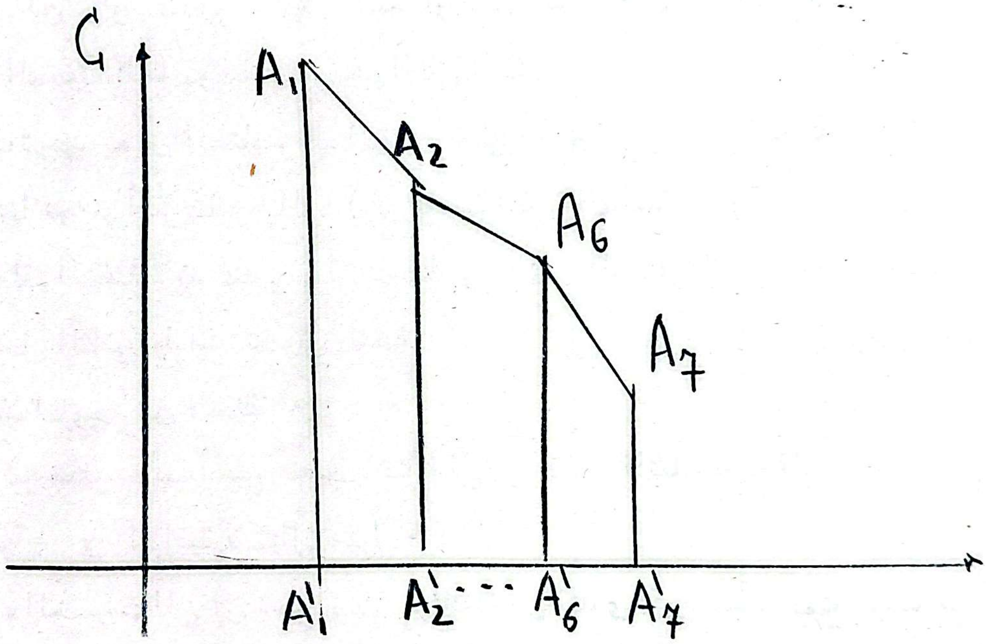
(٦) بما أن أكبر عنصر سالب أصبح عنصرا مختارا فى X فاننا نحوله الى الصفر بحيث أن عناصر X الباقية لا تزال صفرا •

(٧) نكرر هذه الخطوات الى أن نحصل على ذلك الحل الذى تكون عنده جميع قيم X المختارة تساوى صفرا أما العناصر الباقية فتكون موجبة وبذلك يكون هذا الحل هو الأمثل •

(٨) لحساب قيمة الدالة الخطية التى تناظر الحل الأمثل فانه يجب أن نجمع فى جدول واحد من المصفوفة $C = \{c_{ij}\}$ وبين الحل الأخير • ويكون مجموع كل زوج من الأعداد الموجودة فى خلايا الجدول هو الذى يحدد قيمة الدالة الخطية •

ولتوضيح المعنى الهندسى لعملية ايجاد الحل الأمثل بيانيا نضع على المحور الأفقى رقم الحل ، وعلى المحور الرأسى القيمة المناظرة للدالة الخطية c بعد أن نوجد الحل الأول فاننا بذلك نوجد احدى النقط A_1 وذلك عندما تؤول عناصر X المختارة الى

الصفر فنحصل بذلك على النقطة A'_1 على المحور الأفقى • فاذا كان الجدول المحـول لا يحتوى على عناصر سالبة فيكون الحل الذى يناظر النقطة A_1 هو الحل الأمثل • أما اذا وجد بالجدول عناصر سالبة فاننا نوجد النقطة A_2 وذلك عندما تؤول عناصر X_1 الا ختـارة الى الصفر فنحصل بذلك على النقطة A_2 على المحور الأفقى • ثم نبحث عن هل توصلنـا الى الحل الأمثل أم لم نتوصل اليه • فاذا لم نتوصل اليه نوجد النقطة A_3 وهكذا • وبعـد عدد محدود من الخطوات فاننا سنحصل على النقطة الأخيرة التى تناظر الحل الأمثل وبذلـك نحصل على خط متعرج كما هو موضح بالشكل (٢)



سنوضح الآن طريقة الحصول على الحلقة المقفلة التى يكونها أكبر عنصر سالب مع العناصر X المختارة • فاذا كانت m , n صغيرة • فانه يمكن رؤية الحلقة بطريقة مباشرة وذلـك كما هو واضح فى المثال السابق • أما اذا كانت m , n كبيرة نوعا ما فانه يفضـل للتسهيل ايجاد الحلقة المقفلة بالطريقة التالية •

نشطب الصفوف والأعمدة التى تحتوى على صفر واحد من العناصر المختـــارة X (اذ انه لتكوين الحلقة يجب أن يحتوى العمود أو الصف على ما لا يقل عن صفرين) وبعــد

الشطب الأول نحمل الشطب الثانى فى الجدول كله وهكذا الى أن نصل الى الوضع الذى يعطينا الحلقة المقفولة بشكل مباشر •

ولتوضيح ذلك نذكر المثال المبـــين فى الجدول التالى

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1				0				0							0
2				0						0					
3				0			0						-9		
4		0	0				0								
5		0				0			0						
6									0						
7	0								0			0			
8	0										0				
9					0						0				
10					0								0	0	

من الجدول السابق نشطب أولا جميع الأعمدة التى تحتوى على صفر واحد فقط (مـــن الطبيعى أيضا أن نستبعد ذلك العمود الذى يوجد به أكبر عنصر سالب) وأرقام هذه الأعمدة هى 15, 14, 12, 10, 8, 6, 3

وبعد ذلك نلجأ الى الصفوف ونشطب منها تلك الصفـــوف التى بها صفر واحد (1 , 2 , 6)

وبعد ذلك نعود مرة ثانية الى الاعمدة ونشطب منها الاعمدة التى بها صفر واحد :

وهكذا بعد عدد محدد من الخطوات فانه لا يتبقى بالجدول الا تلك العناصر التى تكون الحلقة مقفلـــــة .

ملحوظة : (١) لقد ذكرنا طريقة حل المشكلة السابقة فى حالة

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

أما اذا كانت

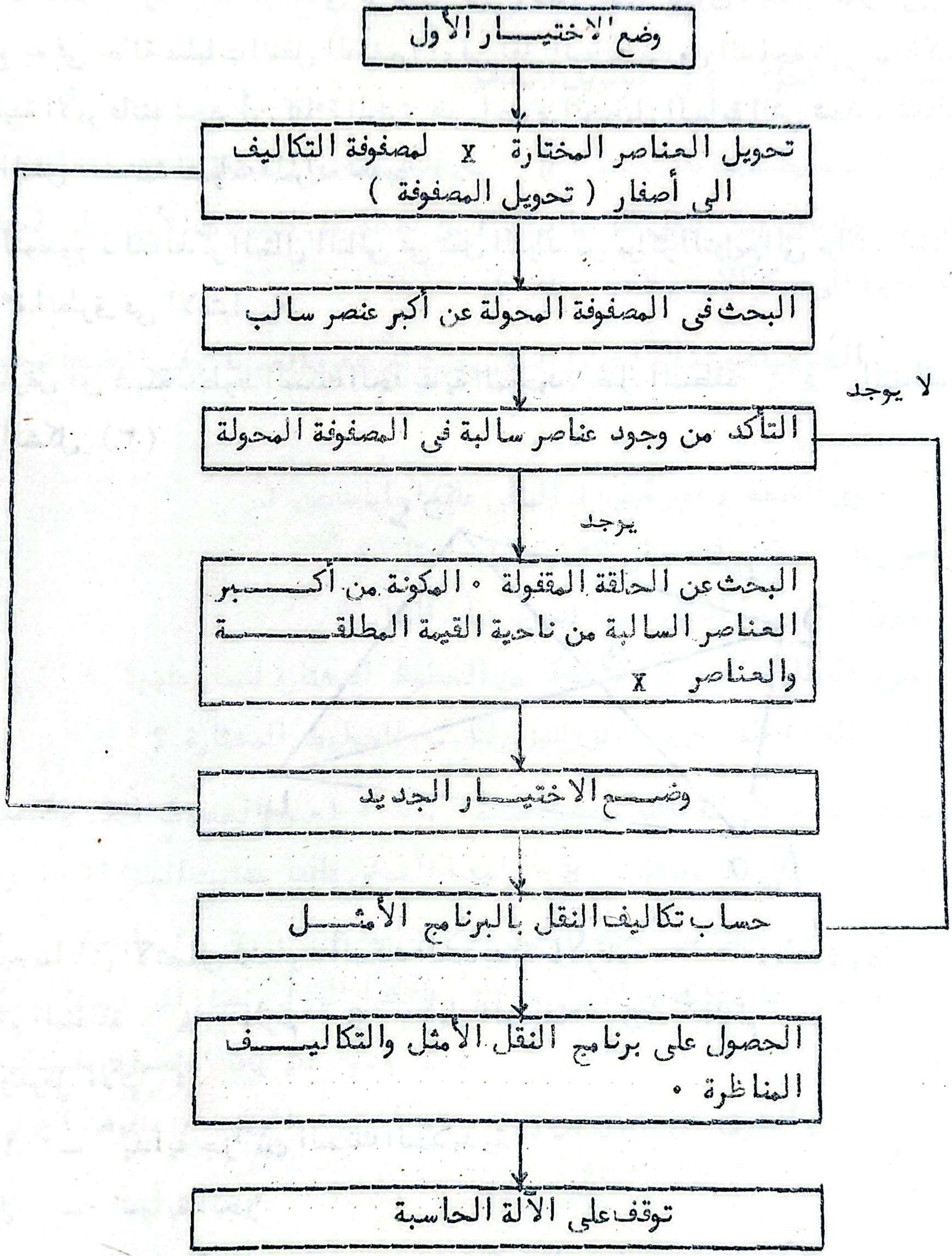
$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

فاننا نتخيل وجود العمود $m + 1$ والذى له

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$C_{i,\ n+1} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

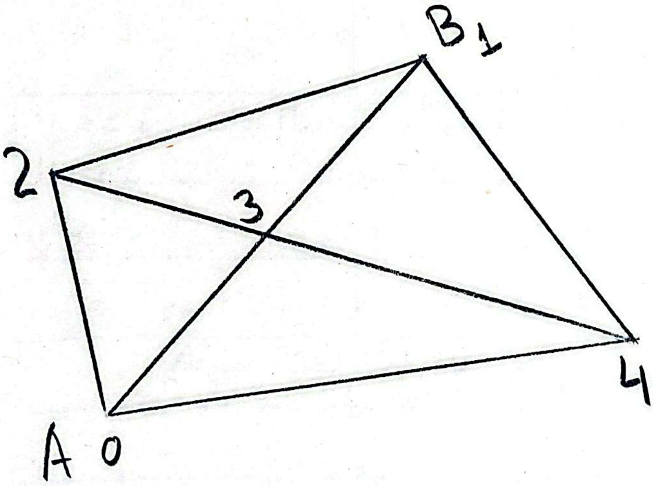
(٢) يمكن وضع Flow Chart لعملية ايجاد الحل على الآلات الحاسبة الالكترونية فى الشكل التالى :


وضع الاختيـــار الأول
تحويل العناصر المختارة X لمصفوفة التكاليف الى أصفار (تحويل المصفوفة)
البحث فى المصفوفة المحولة عن أكبر عنصر سالب
لا يوجد
التأكد من وجود عناصر سالبة فى المصفوفة المحولة
يوجد
البحث عن الحلقة المقفولة ٠ المكونة من أكـــبر العناصر السالبة من ناحية القيمة المطلقـــــة والعناصر X
وضـــع الاختيـــار الجديد
حساب تكاليف النقل بالبرنامج الأمثـــل
الحصول على برنامج النقل الأمثل والتكاليـــف المناظرة ٠
توقف على الآلة الحاسبة

فيما سبق ذكرنا المشاكل التى لم تأخذ فى الاعتبار كفاءة الطرق ، وهذا ممكن فى حـدود المسموح به فى حالة عمليات النقل الصغيرة أو فى نقل المواد وبدون الحاجة الى سرعة كبـيرة . وفى حقيقة الأمر فاننا نجد أن كفاءة الطرق هى احدى العوامل الهامة التى تحدد تخطـيط عمليات النقل الضخمة للمواد المراد نقلها .

لتوضيح ذلك نذكر المثال التالى فى نقل المواد من مراكز التوزيع الى مراكز الاستهلاك مع أخذ كفاءة الطرق فى الاعتبار .

نفرض أن شبكة خطوط السكك الحديدية الموجودة تصل المنطقة A بالمنطقة B كما فى الشكل (٣)



نرقم جميع مناطق الاتصال لخطوط السكك الحديدية بالأرقام 2,3,...
ونضع أمام المنطقة A الرقم 0 وأمام المنطقة B الرقم 1
ونفرض الآتى :

i ـ بداية جزء من السكك الحديدية

j ـ نهاية الجزء

ij ـ طول الجزء

t_{ij} ـ الزمن اللازم لقطع هذا الجزء

n_{ij} – كفاءة الجزء ij للطريق الحر

n_{ij}^{x} – كفاءة الجزء ij للطريق المشغول

والمطلوب هو تخطيط عملية نقل عدد N من العربات من المنطقة A الى المنطقة B بحيث يكون زمن النقل أقل ما يمكن (من لحظة نقل العربات الأولى الى لحظة نقل العربات الأخيرة الى مركز الاستهلاك B)

وأحيانا يكون المطلوب هو تخطيط عملية النقل بحيث تتم هذه العمليات في الوقت المحدد لهـا .

ويجب أن تحتوى الخطة (البرنامج) المثلى على اجابات عن :

(١) ما هو أقصر وقت T_{min} يلزم لاتمام عمليات النقل ؟

(٢) ما هي الطرق التي يجب النقل عليها لتنفيذ عملية النقل ؟

(٣) ما هي السرعة المطلوبة للسفر في كل خط من الخطوط المختارة للسفر عليها ؟

(٤) كم عدد الأيام اللازمة للشحن من مركز التوزيع لكل من الخطوط المختارة ؟

لكي نجيب على هذه الأسئلة فاننا سنعمل عملية (ربط) لجميع الخطوط التي يمكن أن تؤدى من المنطقة A الى المنطقة B ولهذا الغرض فاننا سنثبت الجزء الاختيارى من الخط Oq ونوجد ذلك الجزء من الخط الذى تكون بدايته هي q . ولنفرض أن هذا الجزء هو qp وبعد ذلك نبحث عن الجزء pf وهكذا الى أن نصل الى الجزء $\ell 1$ وهذا معناه أننا أنشأنا الخطوط $oq\ pf \ldots \ell 1$ ونعمل بنفس الخطوات السابقة عدد من الطرق لكي نتمكن من ربط جميع الخطوط الممكنة . ولفرض أن عدد الخطوط هو m

نفرض أن λ_{kij} تساوى واحد اذا كان الجزء ij هو أحد عناصر الطريق رقم k وتساوى صفرا في الحالة العكسية .

ثم نضع لكل خط من الخطوط التي أنشأناها الكفاءة المناظرة .

$$n_k = \min_{\gamma_{kij} = 1} n_{ij}$$

ويكون الزمن الذى يلزم فى هذا الخط هو

$$t_k = \sum_{\gamma_{kij}} \gamma_{kij} \; t_{ij}$$

ويمكن وضع المعلومات الأولية ونتائج ربط الخطوط على صورة الجدول التالى (١٢)

الجزء / الطريق	....	ij , t_{ij} , n_{ij}	...	زمن النقل	الكفاءة
1	...	....	...	......	...
⋮					
k	...	γ_{kij}	...	t_k	n_k
⋮	...	⋮	...	...	...

نفرض، أن λ_k هو معامل استخدام كفاءة الطريق k حيث ان

$$0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$$

كذلك ان لكل، λ_k يوجد معدا، معين للنقل، يساوى، n_k λ_k . اذا افترضنا أن جميع الطرق التى عددها m لا تحتوى، على، أجزاء مشتركة عامة ij أى أن شبكة الطرق الموجودة يمكن تصورها على، هيئة خطوط غير متقاطعة فان القيد الوحيد الذى، نضعه على، λ_k هو المتباينة

$$0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$$

أما في حالة شبكات الطرق الاختيارية فيجب أن تحقق λ_k المبتاينات

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{kij} \lambda_k n_k \leqslant n_{ij}$$

لكل ij

وكل واحدة منها تعني أن مجموع معدلات النقل $\sum \lambda_k nk$ لجميع الطـــرق التي تشتمل على الجزء ij كمنصر منها ، يجب أن لا تزيد عن كفاءة هذا الجزء nij

وهكذا فان معاملات استخدام الطرق المختلفة ، والتي نريد معرفتها لكي نحصل علـــى معدلات النقل يجب أن تحقق مجموعة المتباينات

$$\left.\begin{aligned} & 0 < \lambda_k \leqslant 1 \\ & \sum_{k=1}^{m} \gamma_{kij} \frac{n_k}{n_{ij}} \lambda_k \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

مجموعة الحلول الممكنة $\{\lambda 1, \lambda 2, \ldots, \lambda m\}$ لمجموعة المتباينات

(١) تحدد القيم المسموح بها لمعدلات النقل $\{\lambda_1 n1, \lambda 2n2, \ldots, \lambda_m n_m\}$ لجميع الطرق في نفس الوقت .

لنأخذ بعض القيم المسموح بها لمعدلات النقل $(\lambda_1 n1, \lambda_2 n2, \ldots \lambda_m n_m)$

وهنا فان جميع البرامج الممكنة لعمليات النقل يجب أن تحقق

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k n_k x_k = N$$

حيث x_k زمن الشحن للطريق k بالأيام لمعدل النقل n_k λ_k

ومن الواضح أنه اذا استخدمنا الطريق رقم k فقط بأقصى معدل نقل n_k فان زمن الشحن على هذا الطريق هو

$$a_k \quad \frac{N}{n_k}$$

وكذلك فان قيم x_k تحقق الشروط

$$0 \leqslant x_k \leqslant a_k$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{a_k} \; x_k = 1$$

وكذلك فانه عند القيم المعطاة لمعدلات النقل للطرق المختلفة نحصل على مجموعة حلول $\{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$ تحدد زمن الشحن لكل طريق وكل حل من الحلول $\{ x_1, \ldots, x_m \}$ يناظر أزمنة مقيدة للنقل فى كل طريق من هذه الطرق وهذه الأزمنة تحدد من التعبير

$$\{ x_1 + t_1, \; x_2 + t_2, \ldots, \; x_m + t_m \}$$

أما فيما يختص بايجاد الحل الأمثل ، والذى سنذكره فيما بعد ، فهو ايجاد قيم λ_k $(k=1,\ldots,m)$ الموجبة التى تجعل الدالة الغير خطية

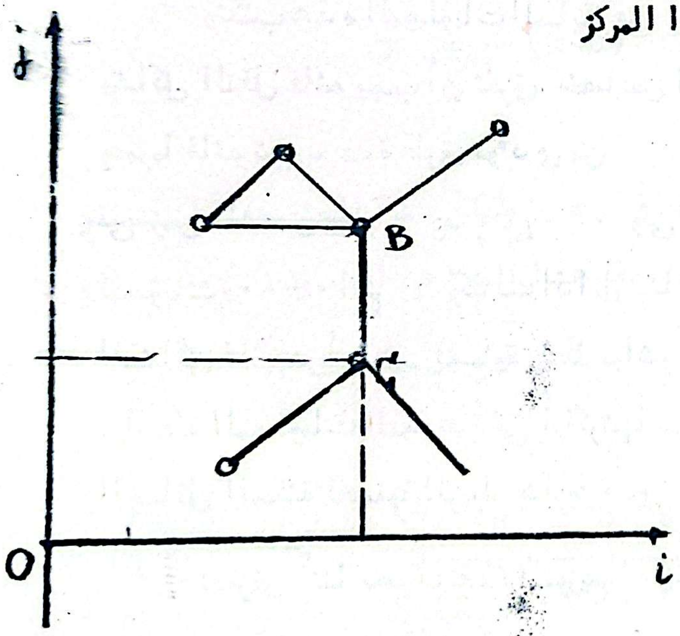
$$T = \frac{N + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \; n_k \; t_k}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \; n_k}$$

نهاية صغرى تحت القيود التالية

$$0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$$

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{kij} \; \frac{n_k}{n_{ij}} \lambda_k \leqslant 1$$

من المعروف أنه عند حل أى مشكلة فاننا عادة ما نستخدم معلومات يكون بعضها ثابتا والبعض الآخر متغيرا • ولكى نسرع فى حل مثل هذه المشاكل فان المعلومات الثابتة تسجل سلفا فى ذاكرة الآلات الحاسبة الالكترونية على شريط تسجيل أو على اسطوانة • فمثلا فيما يختص بتلك المعلومات عن شبكة خطوط السكك الحديدية فاننا نرسم خريطة شبكة خطوط السكك الحديدية على ورقة توجد بها المحاور المتعامدة ونرمز لكل مركز من المراكز بثنائى من الأرقام الصحيحة التى تعبر عن الأجزاء الكاملة لقيم احداثيات هذا المركز



فمثلا فى الشكل (٤) اذا كانت النقطة C تقابل الاحداثيات (3.1 , 2.2) فاننا نضع المركز C على الرسم بحيث يقابل الثنائى (3,2) حيث

$j = 2 \; , \; i = 3$

سنحدد الجزء الموجود بين Q , P بالنقطتين $(i_p \; , \; j_p \; , \; i_q \; , \; j_q)$

والمعلومات الثابتة عن هذه الأجزاء يمكن أن نضعها فى الصورة

$$(\; i_p \; , \; j_p \; , \; i_q \; , \; j_q \; , \; t_{pq} \; , \; n_{pq} \; , \; n_p \; , \; n_q , \; \ell_{pq} , \; \ldots \;)$$

حيث

t_{pq} زمن الشحن خلال الجزء PQ

n_{pq} كفاءة الجزء PQ

n_p, n_q كفاءة المراكز P , Q

l_{pq} الطول المسموح لعربات السكك الحديدية فى المحاور على الجزء PQ

فمثلا اذا كتبنا $\{ 3,4;\ 3,\ 2;\ \ 8;\ 26;\ 60;\ 50,\ 210 \}$

فهذا يعنى أننا نتكلم عن الجزء الموجود بين B,C زمن الشحن على هذا الجزء 8 ساعات والكفاءة هى 26 عربة فى اليوم • وكفاءة جميع اتجاهات طرق السكك الحديدية للنقط B , C هى 60,50 عربة فى اليوم والطول المسموح به لعربات السكك الحديدية هو 210 عربة بالنسبة الى جميع المحاور فى الجزء P,Q

وتكتب هذه المعلومات السابقة فى ذاكره الحاسب الالكترونى وعند حل أى مشكلة من مشاكل النقل فانه يجب أن نفرق خصائص الطرق المستخدمة للربط بين النقطتين A , B وعموما فانه توجد عدة طرق تؤدى من A الى B • وتختلف هذه الطرق عن بعضها فى زمن الشحن بين A , B • وفى تكاليف النقل وفى الكفاءة ، وفى الأطوال المسموح بها للعربات •••• الخ • وكذلك اذا أردنا تجهيز الآلات الحاسبة الالكترونية لحل مثل هذه المشاكل فلا بد أن نقوم بعملية ربط مباشر لمختلف هذه الطرق فى الآلة الحاسبة الالكترونية بواسطة المعلومات الموجودة فى ذاكرتها عن أجزاء شبكة السكك الحديدية وسنذكر هنا احدى الوسائل الممكنة لعملية الربط هذه •

نفترض أننا نعرف نقطة التوزيع A ومكان الاستهلاك B كما فى الشكل (٥)

نصل النقط المناظرة على الرسم بخط مستقيم ثم نرسم احداثيات جديدة للمحاور بالطريقة التالية .

اتجاه المحور الجديد i' ينطبق على الخط المستقيم AB ، أما اتجاه المحور j' فيأخذ الاتجاه العمودى على المحور i' وبما انه يمكن رسم العديد من الطرق التى تؤدى من A الى B بما فى ذلك الطرق الطويلة جدا والمستبعدة (مثل الطريق من القاهرة الى شبين مارا بطنطا) ولكي لا تقوم الآلة الحاسبة (بربط) جميع الطرق الممكنة فاننا سنعطى لها مجالا معينا يسمح لها فيه باختيار الأجزاء المناسبة وليكن هذا المجال هو $(\ell , -\ell)$ من المحور $O' i'$ وبعد تحديد المجال الذى سنبحث فيه عن الحل فانه يجب أولا دراسة الأجزاء التى تقع فى حدوده ونختار تلك الأجزاء التى توصلنا الى النقطة B ولذا فانه عن طريق النقطة A , B سنحول الاحداثيات باستخدام العلاقات

$$x' = (x-a) \cos\varphi + (y-b) \sin\varphi$$

$$y' = -(x-a) \sin\varphi + (y-b) \cos\varphi$$

ولعد ذلك نبحث عن ذلك الجزء الذى يبدأ من النقطة A وليكن هذا الجزء هو $(i_a , j_a , i_1 \; j_1)$ ، ثم نحدد هل يقع هذا الجزء فى الحدود $(\ell ; -\ell)$ ولهذا نوجد الاحداثيات الجديدة للنقطة (i_1 , j_1) من المعادلات

$$i_1' = \frac{(i_1-i_a)(i_b-i_a) + (j_1-j_a)(j_b-j_a)}{\sqrt{(i_b-i_a)^2 + (j_b-j_a)^2}}$$

$$j_1' = \frac{-(i_1-i_a)(j_b-j_a) + (j_1-j_a)(i_b-i_a)}{\sqrt{(i_b-i_a)^2 + (j_b-j_a)^2}}$$

فاذا كانت $|j_1'| \leqslant \ell$ فان الجزء (i_a, j_a, i_1, j_1) يقع فـــى حدود المجال $(\ell - , \ell)$ وزيادة على ذلك فان هذا الجزء يجب أن تتحقق نتيجـــة له المتباينة $i_1' \geqslant 0$ وهذا يعنى أن اتجاه هذا الجزء سيكون ناحية B (أو عمودى على الخط AB) ولذلك فيكون هو الطريق المطلوب.بعد ايجاد هـــذا الجزء بنفس الطريقة نوجد الأجزاء الأخرى • وبذلك يمكن ايجاد الطرق التى تؤدى من B ، A ويمكن أن نميز كل طريق من هذه الطرق بالسمات التى تهمنا مثل زمن الشحن

$$T_{ab} = \sum t_{pq}$$

حيث t_{pq} هو زمن الشحن لكل جزء من مكونات الطريق •

وكفاءة الطريق هى $n_{ab} = \min \{ (n_{pq}) \}$

وهى تساوى كفاءة أقل جزء من أجزاء مكونات الطريق •

نفرض أننا قمنا بعملية الربط لجميع الطرق الممكنة التى تؤدى من A الى B وحددنا كفاءة كل طريق n_k وهى تساوى، كما سبق أن ذكرنا ، أقل كفاءة لمكوناته مـــن الأجزاء ، وكذلك زمن النقل t_k^o من A الى B والذى يساوى مجموع أزمنـــة النقل للأجزاء ولذلك نحدد معاملات استخدام الطرق المختلفة λ_k التى تحقـــق المتباينات •

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leq \lambda_k \leq 1 & k = 1,\dots,m \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_{kij} \frac{n_k}{n_{ij}} \lambda_k \leq 1 & \end{array}\right\} \quad (1)$$

تحدد هذه المتباينات شكل كثير الأضلاع من الدرجة m كما أن كل نقطة على كثير الحدود تحدد المتجه $\lambda\ (\lambda_1 \dots, \lambda m)$ والذى تتكون مكوناته من القيم المسموح بها لمعاملات استخدام كفاءة الطرق وتسمى λ بالمتجه المسموح به •
اذا كان لدينا المتجه المسموح به أو نفس الشئ أعطينا معدلات النقل

$$(\lambda_1 n_1, \lambda_2 n_2, \dots, \lambda_m n_m)$$

فان المجاهيل x_k وهى عدد أيام النقل فى كل طريق ستحقق الشرط

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k n_k x_k = N \\ \text{أو} \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{a_k} x_k = 1 \end{array}\right\} \quad (2)$$

حيث $a_k = \frac{N}{n_k}$

وهذا الشرط يعنى هندسيا ذلك المستوى الذى يقطع من محاور الاحداثيات أجزاء تساوى $\frac{a_k}{k}$ $(k=1,2,\dots,m)$ ، وبذلك فان كل متجه مسموح به λ يناظر مجموعة الحلول $X(x_1,\dots,x_m)$ يحقق الشرط السابق ويحدد عدد أيام الشحن أو النقل فى كل طريق •

وكل حل يحدد زمن النقل بالطرق المختلفة وهذه الأزمنة تحدد من التعبير

$$(x_1 + t_1^o \ , \ x_2 + t_2^{(o)}, \ \ldots, \ x_m + t_m^o \ )$$

كما أن المستوى

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda k}{a_k} \quad x_k = 1$$

يكون عموديا على المتجه

$$A \left(\frac{\lambda 1}{a_1} , \frac{\lambda 2}{a_2} , \ldots , \frac{\lambda a_m}{m} \right)$$

ويقطع من محاور الاحداثيات الأجزاء

$$\left(\frac{a_1}{\lambda_1} , \frac{a_1}{\lambda_2} , \ldots , \frac{a_m}{\lambda_m} \right)$$

كما أن فئة المتجهات الممكنة $X(x_1, \ldots, x_m) \geqslant 0$ تحقق الشرط (2) والذى يكون كثير الأضلاع . كما أن كل قيمه $X(x_1, \ldots, x_m)$ تناظر المتجه $T(x_1 + t_1^o , \ldots, x_m + t_m^o)$ والذى يحدد الزمن اللازم للنقل فى كل طريق من الطرق m ومن هنا فان كثير الأضلاع للمتجهات X يناظر كثير الأضلاع للمتجهات T والذى نحصل عليه بالازاحة المتوازية للمتجه الأول فى اتجاه المتجه $t_o \ (t_1^o , \ldots, t_m^o)$ مسافة تساوى طول هذا المتجـــه .
أى أن

$$T = X + t_o$$

نكتب معادلة المستوى الذى يوجد بداخله كثير الأضلاع للمتجه T وهذا المستوى يتعامد على المتجه A ويمر بالنقطة $A_o + t_o$

حيث أن
$$A_o \left(0,0, \ldots, 0, \frac{a_p}{\lambda_p} , 0, \ldots 0 \right)$$

وبذلك يمكن كتابة معادلة هذا المستوى على الصورة

$$(T - A_o - t_o)\, A = 0$$

حيث $T = T(t_1, \ldots, t_m)$ عبارة عن المتجه الذى يمثل الزمن .

ومما سبق نحصل على

$$\sum (t_k - t_k^o) \frac{\lambda_k}{a_k} + (t_p - \frac{a_p}{\lambda_p} - t_p^o) \frac{\lambda_p}{a_p} = 0$$

أو

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{a_k} t_k = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{a_k} t_k^o \quad \ldots . (3)$$

وهذه هى معادلة المستوى الذى يوجد بداخله كثير الأضلاع للحل .

ولذلك فان أى متجه مسموح به $T(t_1, \ldots, t_m)$ يناظر λ كثير الاضلاع للحلول X , T حيث ان

$$T = X + t_o$$

اذا تقاطع كثير الأضلاع للحلول T مع الراسم $t = t_1 = t_2 = \ldots t_m$

فان جميع مكونات المتجه $T - t_o$ وهى $x_k = t - t_k^o$ تحقق الشـــــرط

$$x_k \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

وبالعكس عند تعيين النقطة $t_1 = t_2 = \ldots, = t_m$ التى

يتقاطع عندها الراسم مع المستوى الذى يوجد به كثير الاضلاع للحل T وبايجاد القيم

$$t - t_1^o , t - t_2^o , \ldots , t - t_m^o$$

فاننا نستطيع أن نتأكد من أن هذه النقطة هى فعلا الحل T فاذا كانت القيم

$$t - t_k^{(o)} \geqslant 0$$

فان نقطة التقاطع هى الحل.

أما اذا كانت سالبة أى أن $x_k = t - t_k^o \leqslant 0$ فان نقطة التقاطع

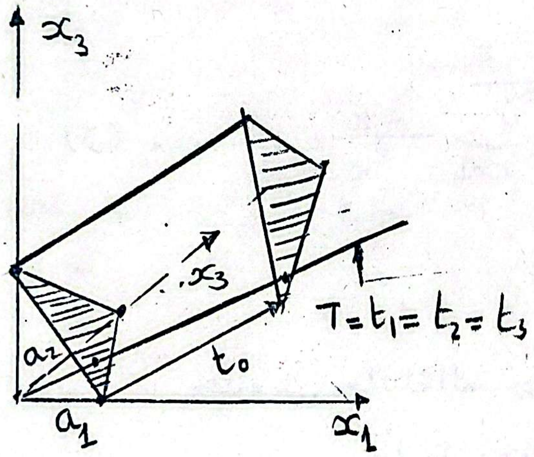
لا تكون هى الحل •

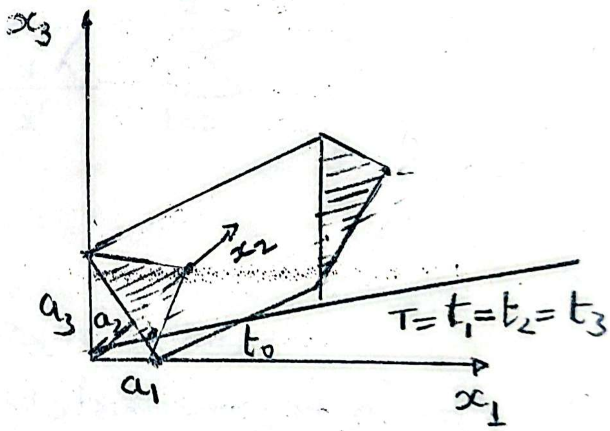
$$t = t_1 = t_2 = \ldots = t_m$$

فى حالة تقاطع كثير الاضلاع مع الراسم

فانه يقال انه يوجد حل قاطع وفى الحالة العكسية يقال انه لا يوجد حل قاطع والشكل التالى

يوضح هذه الصورة فى حالة $m = 3$





كل حل T , X عندما نعطى λ يناظره زمن معين للنقل يساوى أكبر زمن للنقل فى

أحد الطرق • ومن الواضح انه عندما نعطى λ فان أفضل حل بين جميع الحلول

(اذا وجد ذلك الحل) سيكون ذلك الحل الذى يتساوى عنده الوقت اللازم لاتمام عمليات

النقل فى جميع الطرق • وهذا معناه انه يجب ان نحصل على الحل القاطع • وسيكون هو الحل

الامثل للمتجه المعطى λ

لنفرض انه يوجد حل قاطع ولذلك من (3) نجد ان

$$t = \frac{1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{a_k} t_k^{(o)}}{\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{a_k}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

او الحل القاطع هو

$$t = \frac{N + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k n_k t_k^{(o)}}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k n_k}$$

فاذا كان الحل القاطع هو حل المشكلة فان

$$\frac{1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{a_k} t_k^{(o)}}{\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{a_k}} - t_p^{(o)} \geqslant 0 \quad (6)$$

وبما أن كل قيمة λ لها قيمة مناظرة للحل القاطع t_b فاننا نحصل على الحل الأمثل للقيم λ, T, X وترمز لها $\lambda_{opt}, T_{opt}, X_{opt}$

ونحصل على الحل القاطع الامثل اذا كانت

$$t_p = \frac{N + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(opt)} n_k t_k^{(o)}}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(opt)} n_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

نهاية صغرى

وبذلك فانه لايجاد الحل الأمثل فان المطلوب هو ايجاد قيم $\lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ التي تجعل الدالة الغير خطية

$$t = \frac{N + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(opt)} n_k t_k^{(o)}}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k n_k}$$

نهاية صغرى تحت القيود التالية

$$0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$$

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{kij} \frac{n_k}{n_{ij}} \lambda_k \leqslant 1$$

ويمكن ان تاخذ الصورة (5) الصورة التالية

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\lambda_k}{a_k}}{t - t_k^{(o)}} = 1 \qquad (8)$$

حيث

$$a_k = \frac{N}{a_k}$$

ومن السهل ان نرى ان السطوح ذات المستويات الواحدة لهذه الدالة هى

$$\sum \frac{\frac{\lambda_k}{a_k}}{t_c - t_k^{(o)}} = 1$$

حيث t_c هى t ثابت

وتأخذ t قيمتين

$$t_c' < t_c''$$

وفى هذه الحالة فان

$$\frac{a_k}{t_c' - t_k^{(o)}} > \frac{a_k}{t_c'' - t_k^{(o)}}$$

بما ان $\dfrac{a_k}{t_c - t_k^{(o)}}$ هو الجزء الذى يقطعه المستوى

$$\sum \frac{\frac{\lambda_k}{a_k}}{t_c - t_k^{(o)}} = 1$$

من محاور الاحداثيات ، لذلك يمكن القول بانه مع زيادة t_c فان المستوى سيزاح الى نقطة الاصل .

عند القيم الصغرى t فان المسطح $\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k / a_k}{t - t_k^{(o)}} = 1$ لا يتقاطع مع الشكل المحدب كثير الحدود

$$0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$$

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{kij} \frac{n_k}{n_{ij}} \lambda_k \leqslant 1$$

ويعنى هذا انه القيم المعطاة لكفاءة اجزاء طرق السكك الحديدية لا يمكن تحقيق نقل الاحمال فى ذلك الوقت الصغير المعطى .

وهذه المتسلسلة تناظر المتسلسلة

$$x_m \leqslant x_{m-1} \leqslant \cdots \leqslant x_{k+1} \leqslant 0 < x_k \leqslant \cdots\cdots \leqslant x_1$$

عندئذ فى المعادلة

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \; n_i \; x_i + \sum_{k+1}^{m} \lambda_i \; n_i \; x_i = N$$

وحيث ان الحد الثانى سالب فان

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \; n_i \; x_i > N$$

بالاخذ فى الاعتبار انه لجميع k

$$x_k + t_k^{(o)} = t_\delta$$

وسنتأكد الآن من امكانية تنظيم عمليات النقل فى زمن اقل من t_δ عندما نستخدم الطرق الاولى وعددها k . ولذلك فانه لا يفضل استخدام الطرق التى تكون لها $t_\delta - t_k^{(o)} \leqslant 0$ فاذا اتضح انه بعد استبعاد هذه الطرق أننا لم نحصل مره اخرى على الحل القاطع فاننا نعيد المحاولة مرة اخرى بان نكرر نفس الخطوات السابقة الى ان نصل الى مجموعة الطرق التى يوجد لها حل قاطع . وهذه المجموعة موجودة حتما لانه فى الحالة القصوى يمكن الحصول على طريق واحد فقط .

لكى نوضح ما سبق نذكر مثالا بسيطا يمكن رسمه على مستوى الورقة.اوجد الخطة المثلى لعمليات النقل على شبكة الخطوط الحديدية

الموضحة بالرسم شكل (٧) مع فرض ان الجزء 2 0

مشغول تماما لعمليات نقل الى مكان آخر

كما ان لدينا المعلومات التالية

عدد العربات			N = 180
عربة فى اليوم	20	يوم ,	03 , 2
" " "	15	يوم	31 3
" " "	25	يوم	3(2)1 :4

الحل

(١) ربط الطرق

جدول (١٣)

الطرق	الاجـــزاء				
	03;20;2	31; 15; 3	3(2)1; 25; 4		
1	1	1	0	15	5
2	1	0	1	20	6

(٢) نضع الجدول الآتى (١٤)

جدول (١٤)

$t_k^{(o)}$	5	6
a_k	12	9

حيث $a_2 = \frac{N}{n_2} = \frac{180}{20} = 9, \quad a_1 = \frac{N}{n_1} = \frac{180}{15}$

(٣) نحـــدد $\tau = \min(5+12\ ,\ 6+9) = 15$

(٤) بما ان $t_k^{(0)} < \tau$ فان كلا الطريقين يجب بحثهما .

(٥) نحدد مجموعة المعادلات والمتباينـات

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda_1 \leqslant 1 \\ \lambda_2 \leqslant 1 \\ 15\lambda_1 + 20\lambda_2 \leqslant 20 \\ 15\lambda_1\,(t-t_1^{(0)}) + 20\lambda_2\,(t-t_2^{(0)}) = 181 \end{cases}$$

عنــدما $t = \tau = 15$

ويمكن تحويل المجموعه السابقة الى مجموعة المعادلات التاليـة

$$0 = 1 - (\lambda_1 + y_1)$$

$$0 = 1 - (\lambda_2 + y_2)$$

$$0 = 20 - (5\lambda_1 + 20\lambda_2 + y_3)$$

$$0 = 6 - (5\lambda_1 + 6\lambda_2)$$

ويمكن اثبات ان مجموعة المعادلات والمتباينات (١) تكون مستوى هلبرت عند ما $t = 15$ باستخدام طريقة التحويل المتكافىء .

وتجرى نفس العمليات عند ما $t = 13$ ونتأكد بان المجموعه (١) ليست متكاملة عند ما تسمح باستخدام دقـــة تصل الى يوم واحد عند تحديد t_{opt} فانه يمكن التأكد من ان المجموعة (١) تكون مستوى هلبرت عند $t_\gamma = 14$ وبذلك فاننا نحصل على الحل الامثل عند $\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}$

(٦) تحدد الارقـــام

$$x_1 = t_\gamma - t_1^{(0)} = 14 - 5 = 9$$

$$x_2 = t_\gamma - t_2^{(0)} = 14 - 6 = 8$$

وبما ان $x_k > 0$ فانه يوجد حل قاطـــع

(٧) نحصل نتيجة لذلك على الحل الامثل

معدل النقل فى الطريق 031 هو

عربه فى اليوم $\lambda_1 n_1 = 1 (15) = 15$

معدل النقل فى الطريق 0321 هو

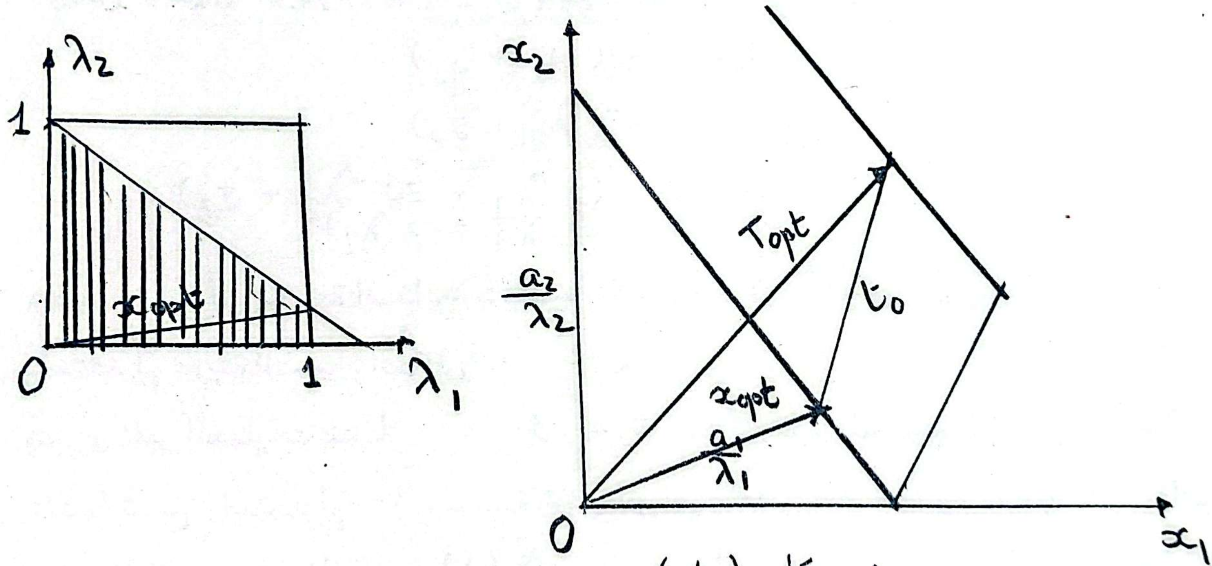
عربه فى اليوم $\lambda_2 n_2 = \frac{1}{4} (20) = 5$

عدد ايام النقل هى $x_1 = 9 \quad , x_2 = 8$

الزمن اللازم لعملية النقل

يوماً $t_b \approx 14$

والشكل التالى يبين التصور الهندسي للحل



شكل (٨)

ونلاحظ انه لتوفير وقت عمل الالات الحاسبه فانه يفضل استبعاد المتباينات الزائدة من المجموعه (١) ولذلك فانه يكتفى بمجموعة المتباينات

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{kij} \lambda_k n_k \leq n_{ij}$$

بان نضع

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 1$$

ويلاحظ انه لتوفير وقت عمل الالات الحاسبه فانه يفضل استبعاد المتباينات الزائده من المجموعه (أ) ولذلك فانه يكتفى بمجموعه المتباينات

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{kij} \lambda_k n_k \leq n_{ij}$$

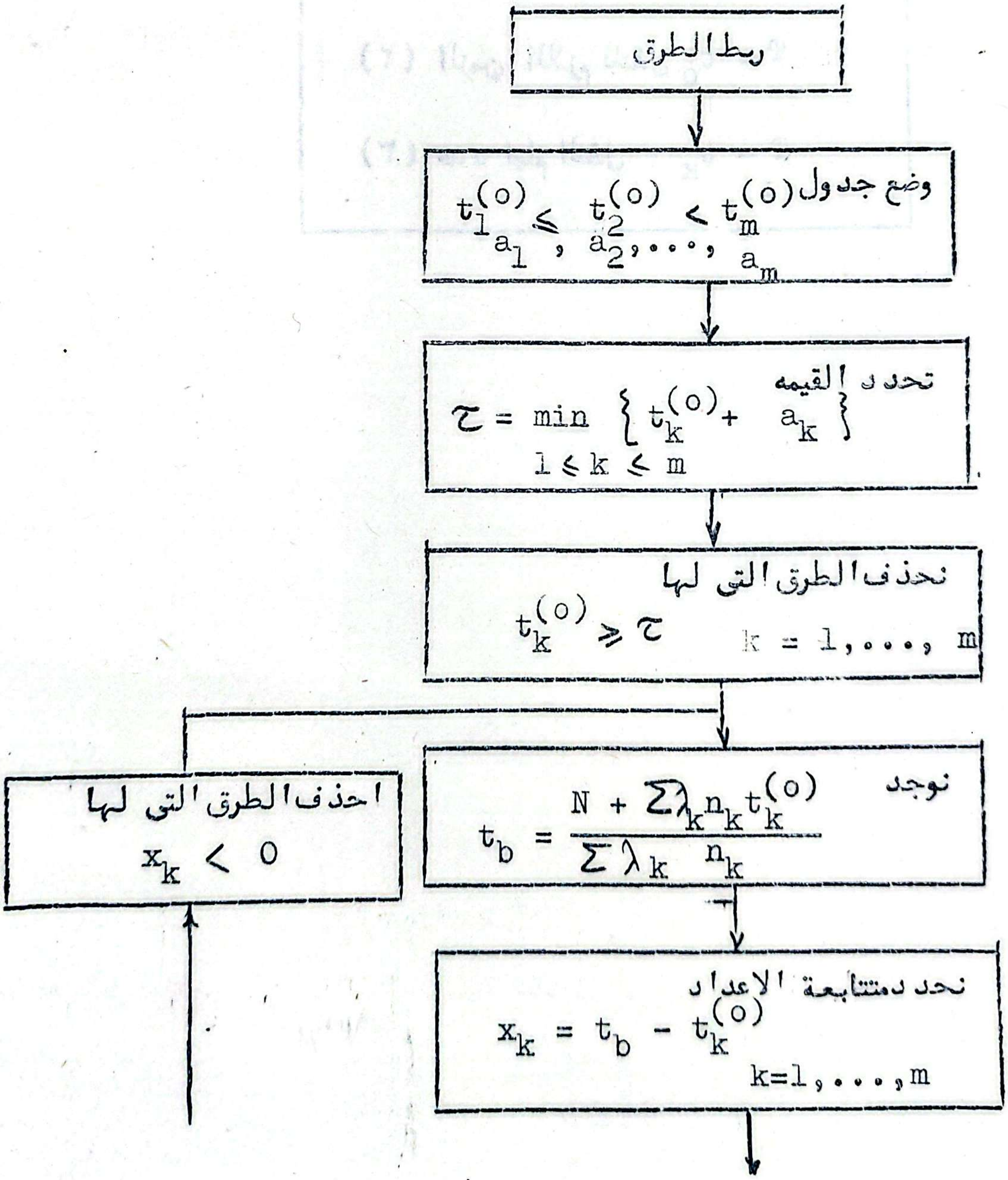
بان نضع

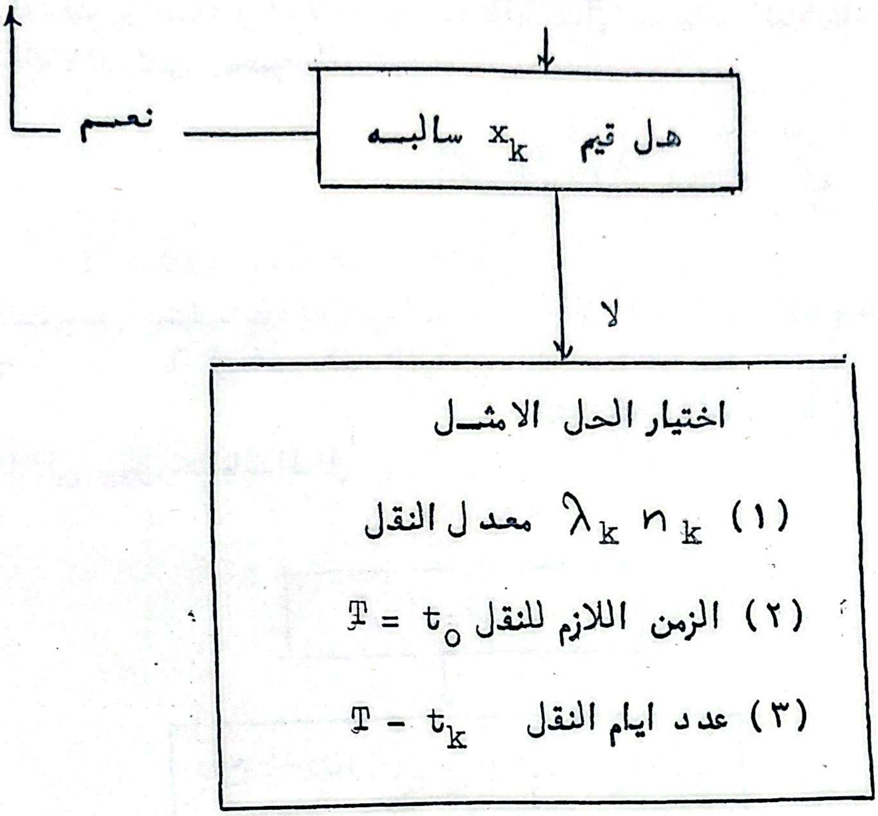
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 1$$

فاذا تحققت بعض المتباينات فانه يجب استبعادها فى العمليات التاليه ومثل هذه المتباينات بالنسبه الى الجزء 1 (2)3 نجد ان

$$\lambda_2 \ (20) \leq 25$$

والشكل التالى يبين خطوات الحل




هل قيم x_k سالبه
نعم
لا
اختيار الحل الامثل
(١) n_k λ_k معدل النقل
(٢) الزمن اللازم للنقل $T = t_0$
(٣) عدد ايام النقل $T - t_k$