UNITED ARAB REPUBLIC

THE INSTITUTE OF
NATIONAL PLANNING

التخطيط القومى

مذكرة رقم ٧١٧

الطرق الاحصائية فى الاقتصاد القياسى

ب ــ طرق التقدير عند تعدد اخطاء المشاهدة .

دكتور محمد محمود الامام

أبريل سنة ١٩٦٧

CAIRO
3, MOHAMED MAZHAR - ZAMALEK

الآراء التي وردت في هذه المذكـــــــــــــــــرة
تمثل رأي الناتب ولاتمثل رأي المعهد ذاتـــــــــــــــه

ب ــ طرق التقدير عند تعدد أخطاء المشاهدة

المحتويـــــات

	رقم الصفحة
١ ــ المشـــكلة	١
٢ ــ الفـــروض	٤
٣ ــ الأسس العامة للتقدير	٦
أولا ــ طريقة الأنحدار القطرى	٨
٤ ــ الفـــروض	٨
٥ ــ أسس التقدير	١١
٦ ــ الأزدواج الخطى	١٥
٧ ــ الأنحدارات الأولية	١٨
مثال (١)	٢١
تمرين (١)	٢٣
٨ ــ تحليل حزم الأنحدار	٢٣
مثال (٢)	٢٦
تمارين (٢) ــ (٤)	٣٤
٩ ــ انتقادات نظرية الأنحدار القطرى	٣٤
ثانيا ــ طريقة المتغيرات المساعدة	٣٧
١٠ ــ نظرية رايرسول	٣٧
مثال (٣)	٤١
تمرين (٥)	٤٤
١١ ــ حالة وجود متغيرات خالية من الخطأ	٤٥
مثال (٤)	٤٦
ثالثا ــ طريقة الأنحدار المرجح	٥٠
١٢ ــ نظرية كوبمانز	٥٠
١٣ ــ نظرية تنتز	٥٢
مثال (٥)	٥٤
رابعا ــ النظرية العامة للمتغيرات المساعدة	٥٨
١٤ ــ نظرية جيرى وبارتلت	٥٨

١ ـ المشكلـــــة :

اتضح لنا عند مناقشة قواعد التقدير باستخدام نظرية المربعات الصغرى[1] أن أحد الشـــروط الأساسية التى يجب أن تتوفر لضمان سلامة التقديرات هو استقلال المتغيرات المحددة عـــن الانحراف ق الذى يظهر فى المعادلة ٠ غير أنه كثيرا ما نواجه فى الدراسات الاقتصاديـــة بالموقف التالى :

تنص النظرية الاقتصادية على وجود علاقة رياضية (تامة) بين عدد (م مثلا) من المتغيرات ، بمعنى أنه لو أمكن مشاهدة هذه المتغيرات بدقة كاملة لتحققت المعادلة بدون أى انحـــراف ٠ وسنرمز الى هذه المتغيرات النظرية بالرمز $\tilde{\text{ص}}_{\text{ر}}$ (ر = صفر ، ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠ ، م-١) ، فاذا كانت العلاقة خطية أمكننا أن نقول

$$\text{أ}_{٠}\tilde{\text{ص}}_{٠\text{و}} + \text{أ}_{١}\tilde{\text{ص}}_{١\text{و}} + \text{أ}_{٢}\tilde{\text{ص}}_{٢\text{و}} + \cdots + \text{أ}_{\text{م}-١}\tilde{\text{ص}}_{\text{م}-١ ،\text{و}} + \text{أ}_{\text{م}} = \text{صفر} \qquad (١)$$

حيث المعالم $\text{أ}_{\text{ر}}$ مجهولة ويراد تقديرها ، وحيث العلاقة صحيحة لأى نقطة من نقــــط المشاهدة و (= ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠ ، ن) ٠

غير أنه عند اجراء القياس للمشاهدات ترتكب أخطاء لواحد من عدة أسبـــاب :

(١) الأخطاء الشائعة فى جمع البيانات سواء كان هذا الجمع بطريق الحصر الشامل أو بالعينـــة ، ويرجع فى هذا الشأن الى كتب الاحصاء الاقتصادى ٠

(٢) الالتجاء الى مقاييس مركبة وفقا للقواعد الاحصائية المعروفة للدلالة على بعض المتغيرات الاقتصادية التى تتعذر مشاهدتها مباشرة ٠ فالسعر مثلا متغير لا يمكن مشاهدته مباشرة ، لأن هنـــاك أسعار مختلفة فى الأسواق والأوقات المختلفة ، وقد نضطر الى التعبير عنه بمتوسط معـــين لبعض الأسعار الدالة (فى أوقات معينة أو أسواق محددة) ٠

(٣) ومن هذا القبيل أيضا الاصطلاحات التى يستخدمها الكتاب النظريون للدلالة على مفاهيم ذات مغزى نظرى واضح ، ومع ذلك لا يوجد لها مقابل عملى مباشر ٠ فالمستوى العام للأسعـــار هو تعبير نظرى نلجأ للدلالة عليه الى الأرقام القياسية للأسعار ، ومعلوم أن هذه الأرقام ان هى الا مؤشرات تقريبية ٠

---

(١) مذكرة ٧١٧ جزء (أ)

(٤) وفي كثير من الأحيان يقوم الباحث بدراسة عن فترة ماضية معتمدا على بيانات سبق أن جمعها باحثون آخرون لأغراض مخالفة ، بتعاريف لا تتفق بالضرورة مع تعريفاته النظرية ، ويضطر في سبيل ذلك الى الأخذ بهذه التعاريف في أقرب صورها الى احتياجاته . فنحن قد نرغب في دراسة الاستثمار الصافي أو الدخل الصافي ، ومع ذلك لا تتاح لنا الا البيانات الاجمالية ، فنضطر الى الاستعاضة بها عن المتغيرات الحقيقية اللازمة لنا — وذلك على سبيل التقريب .

هذا النوع الأخير من الأخطاء شائع الحدوث بصور مختلفة ، خاصة وأن الهيئات التي تجمع البيانات ليست هي التي تقوم بتحليلها ، ولا يملك الباحث أن يقوم بعملية جمع البيانات من مصادرها الأولية في أغلب الأحوال . فضلا عن ذلك فانه حتى عندما تتوفر للهيئات المسئولة عن جمع البيانات كافة الامكانيات اللازمة فانها لا تستطيع أن توفر كل المشاهدات بالدقة التامة ، وقد تكتفي بأيراد التقديرات مع ذكر هامش الخطأ في كل منها (± ٥% أو ± ٢٠% مثلا)

اذن يمكننا أن نقول أن القيم $\tilde{\text{ص}}_{\text{رو}}$ قلما تشاهد عمليا وانما الذي يشاهد هو قيم أخرى $\text{ص}_{\text{رو}}$ تختلف عنها بخطأ قدره $\text{ط}_{\text{رو}}$ ، وهو مقدار مجهول ، والا أمكن تصحيح المشاهدات به للوصول الى القيم الحقيقية . وبذلك يتلخص الموقف في أن المشاهدات تتكون من جزئين مجهولين :

(١) جزء حقيقي أو منتظم $\tilde{\text{ص}}_{\text{رو}}$ (Systematic or ideal)

(٢) خطأ في المشاهدة $\text{ط}_{\text{رو}}$ (Measurement or Observation Error)

بحيث تكون المشاهدات هي

$$\text{ص}_{\text{رو}} = \tilde{\text{ص}}_{\text{رو}} + \text{ط}_{\text{رو}} \qquad (٢)$$

فاذا حاول الباحث تقدير المعالم $\text{أ}_{\text{ر}}$ في (١) باستخدام المشاهدات الخاطئة نشأت لديه معادلة جديدة هي :

$$\text{أ}_{.}\,(\text{ص}_{.\text{و}} - \text{ط}_{.\text{و}}) + \ldots\ldots + \text{أ}_{\text{م}-١}\,(\text{ص}_{\text{م}-١\text{،و}} - \text{ط}_{\text{م}-١\text{،و}}) + \text{أ}_{\text{م}} = \text{صفر}$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها كالاتـــي

$$\text{أ}_{٠}\text{ص}_{٠و} + \text{أ}_{١}\text{ص}_{١و} + \cdots + \text{أ}_{م-١}\text{ص}_{م-١،و} + \text{أ}_{م} = \text{ط}_{و} \qquad (٣)$$

حيث

$$\text{ط}_{و} = \text{أ}_{٠}\text{ط}_{٠و} + \text{أ}_{١}\text{ط}_{١و} + \cdots + \text{أ}_{م-١}\text{ط}_{م-١،و} \qquad (٤)$$

أى أنها مجموع لأخطاء المشاهدات كلها ، كل منها مرجح بوزن يساوى المعاملات الخاصة بمتغيره .

هذه الصورة الجديدة للمعادلة أظهرت أنها معادلة احصائية تحتوى على خطـــأ (عشوائى) هو $\text{ط}_{و}$ ، مما يغرى الباحث بأن يسعى لاستخدام طريقة المربعات الصغرى . وهذا هو ما كان شائعا حدوثه سواء بين الاقتصاديين الذين ألموا بعض الالمام ببعض الطرق الاحصائية ، أو بين الاحصائيين الذين لم يسعوا الى دراسة خصائص المشاهدات الاحصائية الاقتصادية ، ولذلك صاغوا المعادلة (١) مباشرة فى الصورة (٣) دون توضيح (٢) .

فاذا كان هناك ما يدعو الى اعتبار أن أحد المتغيرات $\text{ص}_{٠}$ مثلا متغيرا تابعا ، استبقى هذا المتغير فى الطرف الايمن بمعامل يساوى الواحد الصحيح ونقلت باقى المتغيرات الـــى الطرف الايسر لتبدو كمتغيرات متبوعة وفقا للمنطق الاقتصادى . وينتقل الامر بعد ذلك الـــى ترجمة هذا الاتجاه للعلاقة السببية أن يعتبر أن $\text{ص}_{٠}$ هو المتغير التابع احصائيا ، بينمـــا الباقين متبوعين فيؤخذ انحداره عليهم . فنحن اذا نقلنا المتغيرات $\text{ص}_{١}$ الى $\text{ص}_{م-١}$ الـــى الطرف الايسر فانها تشغل مكان المتغيرات $\text{ع}_{ر}$ ، وتصبح المعادلة هـــى :

$$\text{ص}_{٠} = \text{ب}_{١}\text{ص}_{١و} + \text{ب}_{٢}\text{ص}_{٢و} + \cdots + \text{ب}_{م-١}\text{ص}_{م-١،و} + \text{ب}_{م} + \text{ق}_{و} \qquad (٥)$$

حيـــث

$$\text{ب}_{ر} = -\text{أ} \,/\, \text{أ}_{٠} \qquad (\text{ر} = ١، \ldots، \text{م})$$

$$\text{ق}_{و} = \text{ط}_{و} \,/\, \text{أ}_{٠}$$

وهذه الصورة توحى بتطبيق المربعات الصغرى ، ولكن هل هذا جائز ؟

من الواضح أن فرض استقلال المتغيرات " المتبوعة " عن البواقى ق لايتحقق لأن ق تحتوى

على الخطأ طـر الذى هو جزء من صر ، وهذا يهدم أحد الشروط الأساسية للمربعات الصغرى [1] ، وعلينا أن نبحث عن طريقة جديدة للتقدير ، ومن هنا نجد أن النظرية الاحصائية يجب أن تتطور بما يخدم أغراض البحث الاقتصادى وظروفه ، وكانت هذه الملاحظة هى أول لبنة وضعت فى صرح علم الاقتصاد القياسى .

٢ ـ الفروض :

كما فعلنا بالنسبة للمربعات الصغرى ، علينا أن نبدأ بتحديد الفروض التى تناسب الموقف الجديد ، وبالذات نبرز خصائص المتغيرات العشوائية طـر عن طريق تحديد بعض المعالم الأساسية لتوزيعها . وهذه الفروض هى :

(١) توقع كل خطأ هو الصفر لكل نقطة من نقط المشاهدة

ت (طـ$_{رو}$) = صفر (لجميع ر ، و) (٦)

وهذا ينفى وجود تحيز فى قياس مشاهدة ما ، يجعل طريقة القياس المستخدمة تعطى دائما نتيجة أعلى من الواقع أو دون الواقع . (لاحظ أن هذا قد لا يتحقق أحيانا : فرقم لا سبيرز القياسى متحيز الى أعلى بعكس رقم باشى . غير أننا سنعتبر أنه حتى لو استخدمت صيغة مثلى فستظل هناك أخطاء أخرى عشوائية يمكن أن تكون تارة بالزيادة وأخرى بالنقص بحيث نستطيع أن نعتبر قيمتها المتوسطة النظرية هى الصفر) .

(٢) الأخطاء مستقلة عن بعضها البعض سلسليا Serially Independent بمعنى أن القيمة لخطأ معين فى نقطة معينة مستقلة عن قيمته وقيمة غيره من الأخطاء فى نقطة أخرى . وأحد شروط الاستقلال أن يكون :

ت (طـ$_{رو}$ × طـ$_{ر'و'}$) = صفر (لجميع ر ، ر' حيث و ≠ و') (٧)

(لاحظ أيضا أن هذا قد لا يتحقق فى الدراسات الاقتصادية . فقد نعتمد على تعداد إنتاج يؤخذ كل عشر سنوات لانشاء سلسلة زمنية باستخدام بيانات عن السنوات بين التعدادات تبنى على رقم التعداد ، مما قد يؤدى إلى تكرر خطأ معين لعدد من السنوات . ولذلك فان عملية جمع البيانات الاقتصادية عملية مستمرة ودائبة التصحيح كلما توفرت معلومات جديدة) .

---

(١) أنظر المذكرة رقم ٧١٧ ـ القسم أ صفحة ١٣ ، ١٨ .

(٣) العلاقة السابقة (٧) لم تتعرض للحالة التى فيها و = وَ ، أى التى تنتمى فيها الاخطاء الى نفس الفترة . فنلاحظ أولا أنه اذا كانت ر = رَ فان هذا التوقع يكون هو توقع مربع $\text{ط}_{\text{رو}}$ أى التباين . وكما فى المربعات الصغرى ، اذا رمزنا الى التباين بالرمز ى فانه يفترض أن كل خطأ له تباين لا يختلف من نقطة مشاهدة لاخرى :

$$\text{تبا}\left(\text{ط}_{\text{رو}}\right) = \text{ى}_{\text{ر}} \qquad (\text{أيا كانت و}) \qquad (٨)$$
$$(\text{ر} = ٠ ، ١ ، \dots ، \text{م}-١)$$

(٤) أما اذا كانت ر ≠ رَ فانه يصبح لدينا تغاير خطئين . ومعلوم أنه فى بعض الحالات يرتبط خطأ مشاهدة متغير بخطأ مشاهدة متغير آخر . فمثلا قد نقيس الاستهلاك بأنه فرق الدخل عن الاستثمار ، ولذلك فأن أى خطأ فى الاخيرين ينتقل الى الاول . كذلك قد نقسم الدخل النقدى والاستهلاك النقدى على رقم قياسى لاسعار التجزئة لنستبعد أثر التغير فى السعر ، ولذلك فان الخطأ فى هذا الاخير ينعكس بنفس الشكل فى المتغيرين السابقين .

ومع ذلك فان بعض النظريات التى سوف نستخدمها تفترض غياب هذا النوع من العلاقات بين الاخطاء :

$$\text{تغا}\left(\text{ط}_{\text{رو}} ، \text{ط}_{\text{رَو}}\right) = \text{صفر} \qquad (\text{لجميع ر} \neq \text{رَ ولجميع و}) \qquad (٩)$$

(٥) أما الفرض المناظر لاستقلال المتغيرات المحددة عن الاخطاء فى المربعات الصغرى فانه ينتقل الآن الى شرط استقلال الجزء الحقيقى للمتغيرات عن الاخطاء سواء لنفس المتغير أو غيره :

$$\text{تغا}\left(\tilde{\text{ص}}_{\text{رو}} ، \text{ط}_{\text{رَو}}\right) = \text{صفر} \qquad (\text{لجميع ر ، رَ}) \qquad (١٠)$$

ويترتب على ذلك أن :

$$\text{تغا}\left(\tilde{\text{ص}}_{\text{رو}} ، \text{ق}_{\text{و}}\right) = \text{صفر} \qquad (١٠َ)$$

وفى نفس الوقت نجد أن :

$$\text{تغا}\left(\text{ص}_{\text{رو}} ، \text{ق}_{\text{و}}\right) = \text{تغا}\left(\tilde{\text{ص}}_{\text{رو}} ، \text{ق}_{\text{و}}\right) + \text{تغا}\left(\text{ط}_{\text{رو}} ، \text{ق}_{\text{و}}\right)$$
$$= \text{صفر} + \text{ت}\left(\text{ط}_{\text{رو}} \times \sum_{\text{هـ}=٠}^{\text{م}-١} \text{ب}_{\text{هـ}} \, \text{ط}_{\text{هـو}}\right)$$
$$\neq \text{صفر}$$

ولذلك فان طريقة المربعات الصغرى لا تنطبق ، ولابد من طريقة أخرى للتقدير .

(٦) وكما في حالة المربعات الصغرى فان تقدير المعالم المجهولة التي عددها م يستلزم أن يكون عدد المشاهدات هو م على الاقل :

$$\text{ن} \geq \text{م} \qquad (11)$$

فلو فرض أن توفر العدد اللازم من المشاهدات فما هو السبيل الى إجراء التقدير ؟

٣ ـ <u>الأسس العامة للتقدير</u> :

لنعد مرة أخرى الى المعادلة بصورتها (٣) التي لا يميز فيها أحد المتغيرات كمتغير تابع . وواضح أن التعويض بالمشاهدات فيها يعطي ن معادلة

$$\sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}-1} \text{أ}_{\text{ر}}\, \text{ص}_{\text{ر و}} + \text{أ}_{\text{م}} = \text{ط}_{\text{و}} \qquad (\text{و} = 1 ، \cdots ، \text{ن}) \qquad (3)$$

ومن الممكن استخلاص تقدير للمعلمة أم باستخدام فرض عدم تحيز الأخطاء (٦) :

$$\hat{\text{أ}}_{\text{م}} = - \sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}-1} \hat{\text{أ}}_{\text{ر}}\, \bar{\text{ص}}_{\text{ر}} \qquad (4)$$

أو ، اذا استخدمنا الصورة (٥) بدلا من (٣) ، فان الحد المطلق يكون تقديره هو :

$$\hat{\text{ب}}_{\text{م}} = \bar{\text{ص}}_{0} - \sum_{1}^{\text{م}-1} \hat{\text{ب}}_{\text{ر}}\, \bar{\text{ص}}_{\text{ر}} \qquad (4')$$

وعلى ذلك تتركز المشكلة في تقديرات المعاملات الاخرى $\hat{\text{أ}}_{\text{ر}}$ (ر = صفر ، ١ ، ... ، م ـ ١) .
واذا حذفنا التقدير $\hat{\text{أ}}_{\text{م}}$ من المعادلة الأصلية وكتبنا ض للدلالة على انحرافات المتغيرات ص عن متوسطاتها الحسابية ، فان

$$\sum_{=0}^{\text{م}-1} \text{أ}_{\text{ر}}\, \text{ض}_{\text{ر و}} = \text{ط}_{\text{و}} \qquad (12)$$

فلو أننا حاولنا استخدام الأسلوب الذي توصلنا به الى التقديرات في حالة توفر شروط المربعات الصغرى لكان علينا أن نضرب المعادلة في كل من المتغيرات $\text{ض}_{\text{هـ و}}$ ثم نجمع بالنسبة لجميع نقط المشاهدة و :

$$\therefore \sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}-1} \text{أ}_{\text{ر}} \left(\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{ض}_{\text{ر و}}\, \text{ض}_{\text{هـ و}} \right) = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{ط}_{\text{و}}\, \text{ض}_{\text{هـ و}}$$

(هـ = ٠ ، ١ ، ٠٠٠ ، م ــ ١)

وبذلك نحصل على م معادلة يمكن حلها للحصول على التقديرات المطلوبة اذا أمكن حساب جميع حدودها ٠ وهنا نلاحظ أن :

(١) المقادير التي تظهر في الطرف الأيمن هي عزوم المتغيرات ، محسوبة من قيمها المشاهدة :

$$\text{م}_{\text{ر هـ}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{ض}_{\text{ر و}}\, \text{ض}_{\text{هـ و}} \qquad (١٣)$$

(٢) أما المقادير التي تظهر في الطرف الأيسر فانه لا يمكن حسابها مباشرة طالما أن الأخطاء $\text{ط}_{\text{و}}$ غير مشاهدة ٠ لذلك نحاول أن نعوض عنها بقيمها المتوقعة ، مع التعويض عن $\text{ط}_{\text{و}}$ وفقا لتعريفها (٤) وعن $\text{ض}_{\text{هـ و}}$ وفقا للتعريف (٢) :

$$\therefore \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{ط}_{\text{و}}\, \text{ض}_{\text{هـ و}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \left(\text{أ}_0 \text{ط}_{0\text{و}} + \text{أ}_1 \text{ط}_{1\text{و}} + \cdots + \text{أ}_{\text{م}-1} \text{ط}_{\text{م}-1\text{، و}} \right) \left(\bar{\text{ض}}_{\text{هـ و}} + \text{ط}_{\text{هـ و}} \right)$$

$$\therefore \text{ت} \left(\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{ط}_{\text{و}}\, \text{ض}_{\text{هـ و}} \right) = \text{صفر} + \text{ت} \left(\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{هـ}}\, \text{ط}^2_{\text{هـ و}} \right)$$

$$= \text{ن}\, \text{أ}_{\text{هـ}}\, \text{ى}_{\text{هـ}}$$

ويلاحظ أن توقع حاصل ضرب $\text{ط}_{\text{و}}$ في $\bar{\text{ض}}_{\text{هـ و}}$ يساوى الصفر نتيجة للفرض (١٠) ٠

ومن جهة أخرى فان توقع حاصل ضرب $\text{ط}_{\text{و}}$ في $\text{ط}_{\text{هـ و}}$ يعطى حدودا عددها م كل منها بالصورة : $\text{أ}_{\text{ر}}\, \text{ط}_{\text{ر و}}\, \text{ط}_{\text{هـ و}}$ ٠ وبتطبيق الفرضين (٩) ، (٨) نجد أنه طالما ر تختلف عن الصفر فان التوقع هو الصفر ، ويبقى الحد الوحيد الذى فيه ر = هـ وهنا نحصل على $\text{أ}_{\text{هـ}}\, \text{ط}^2_{\text{هـ و}}$ ، وتوقعها هو $\text{أ}_{\text{هـ}}\, \text{ى}_{\text{هـ}}$ ، فاذا عوضنا عن القيم بتوقعاتها فان :

$$\sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}-1} \text{أ}_{\text{ر}}\, \text{م}_{\text{ر هـ}} = \text{ن}\, \text{أ}_{\text{هـ}}\, \text{ى}_{\text{هـ}} \qquad (١٤)$$

وعلى ذلك اذا أمكن الحصول على تقديرات للتباينات $\text{ى}_{\text{هـ}}$ (هـ = ٠ ، ١ ، ٠٠٠ ، م ــ ١) فاننا نستطيع التعويض بها وحل هذه المجموعة من المعادلات للحصول على تقديرات المعاملات $\text{أ}_{\text{هـ}}$ ٠

ويمكن القول أن طرق التقدير المختلفة تسعى فى الواقع الى التوصل الى تقديرات مناسبة لهذه التباينات ، بحيث يمكن حل المجموعة (١٤) بما يتفق مع هذه التقديرات التى لابد من أن تكون بدورها متفقة مع الفروض الخاصة بالانحرافات . فطريقة المربعات الصغرى يمكن اعتبارها حالة خاصة فيها تختفى جميع الأخطاء $\text{ط}_{\text{هـ}}$ وبالتالى التباينات $\text{ى}_{\text{هـ}}$ ماعدا الخطأ فى المتغير رقم صفر . ولذلك اذا استبعدنا من (١٤) المعادلة الأولى (هـ = صفر) فانه تبقى (م — ١) معادلة (هـ = ١ ، . . . ، م — ١) هى

$$\sum_{\text{ر}=٠}^{\text{م}-١} \text{أ}_{\text{ر}}\, \text{م}_{\text{ر هـ}} = \text{صفر}$$

ويمكن اعادة كتابتها بوضع $\text{أ}_{٠} = -١$ ، وبالتالى تتحول باقى المعاملات الى $\text{ب}_{\text{ر}}$

$$\therefore \sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}-١} \hat{\text{ب}}_{\text{ر}}\, \text{م}_{\text{ر هـ}} = \text{م}_{\text{ا هـ}}$$

وهذه هى مجموعة المعادلات التى يؤدى حلها الى تقديرات المربعات الصغرى ، كما هو معلوم . ويلاحظ أن المعادلة الباقية التى لم تستخدم فى التقدير (والتى لم تكن لازمة لتقدير المعاملات) تستخدم فى تقدير المعلمة الأخيرة وهى التباين $\text{ى}_{٠}$ لبواقى المعادلة . وبذلك يمكن استكمال كل التقديرات .

هذا الأسلوب لا يصلح اذا كان هناك أكثر من متغير يحتوى على خطأ حيث تحتوى المجموعة على معالم أخرى هى تباينات الأخطاء الأخرى . وسوف نناقش فيما يلى بعض الطرق التى تختلف كل منها من حيث معالجة تقدير هذه التباينات .

أولا — طريقة الانحدار القطرى

٤ — الفـــروض :

كان الكاتب النرويجى فريش Ragnar Frisch هو أول من عالج هذا الموضوع ولفت النظر الى خطورة الاعتماد على المربعات الصغرى خاصة وأن التقديرات تتعرض فى هذه الحالة الى مصدر خطأ جديد هو احتمال وجود أكثر من علاقة خطية بين نفس المتغيرات . وتتلخص مجموعة الفروض فيما سبق أن ذكرناه :

أ ـــ لدينا م من المتغيرات تربط أجزاءها الحقيقية معادلة خطية تامة بدون خطأ هـــــــي المعادلة (١)

ب ـــ تتكون كل مشاهدة من خطأ بجانب الجزء الحقيقي ، وفقا للمعادلة (٢)

حـ ـــ الأخطاء غير متحيزة ، أي أن توقعها الصفر (معادلة ٦)

د ـــ الأخطاء مستقلة سلسليا (معادلة ٧)

هـ ـــ لكل خطأ تباين ثابت لجميع نقط المشاهدة (معادلة ٨)

و ـــ الأخطاء في المتغيرات المختلفة مستقلة عن بعضها البعض (معادلة ٩)

ز ـــ الأجزاء الحقيقية مستقلة عن الأخطاء (معادلة ١٠)

ح ـــ المشاهدات تكوّن المجتمع الكلي للأخطاء وليست مجرد عينة

ولتفادي أثر وحدات القياس ، يعمد فريش الى قياس كل متغير بوحدات معيارية أي يقسم كـــل مشاهدة على الانحراف المعياري للمتغير الخاص بها ، ويترتب على ذلك :

١ ـــ أن العزوم تتحول (بعد قسمتها على ن) الى معاملات ارتباط .

٢ ـــ أن تباين الخطأ في متغير معين يتحول الى نسبة من تباين المتغير نفسه

ويمكن تبين ذلك كالاتـــي :

تباين المتغير $ص_ر$ هو : $\sigma_ر^2 = \frac{1}{ن} م_{رر}$

فيكون انحرافه المعياري هو $\sigma_ر$ ، وبالتالي فانه عند نقطة المشاهدة رقم و يكون المشاهدة $ص_{رو}$ بوحدات معيارية $= \frac{ض_{رو}}{\sigma_ر}$

ويكون الوسط الحسابي بهذه الوحدات هو $\frac{\bar{ض}_ر}{\sigma_ر}$ ، والانحرافات عنه $\frac{ض_{رو}}{\sigma_ر}$

أي الانحرافات بالوحدات الاصلية مقسومة على الانحراف المعياري . وبالتالي فان

عزم المتغيرين ر ، هـ بالوحدات المعيارية $= مجـ_و \left(\frac{ض_{رو}}{\sigma_ر} \times \frac{ض_{هو}}{\sigma_{هـ}} \right)$

$= \frac{م_{رهـ}}{\sigma_ر \sigma_{هـ}}$

ولكن معامل الارْتباط بين هذين المتغيرين هو

$$\text{ر}_{\text{رهـ}} = \frac{\text{م}_{\text{رهـ}}}{\text{ن}\ \sigma_{\text{ر}}\ \sigma_{\text{هـ}}} = \frac{\text{م}_{\text{رهـ}}}{\sqrt{\text{م}_{\text{رر}} \cdot \text{م}_{\text{هـهـ}}}} \qquad (١٥)$$

فاذا كانت $\text{ر} = \text{هـ}$ فان معامل الارْتباط بين المتغير ونفسه هو الواحد الصحيح ٠ ٠

لنرمز الآن بالرموز $\text{ح}_{\text{ر}}$ الى المعاملات $\text{أ}_{\text{ر}}$ مضروبة فى الانْحراف المعيارى $\sigma_{\text{ر}}$

$$\text{ح}_{\text{ر}} = \text{أ}_{\text{ر}}\ \sigma_{\text{ر}} \qquad (١٦)$$

فتصبح المعادلة الاصْلية (٣) المراد تقديرمعالمها هـــى :

$$\text{ح}_{0} \frac{\text{ص}_{0\text{و}}}{\sigma_{0}} + \text{ح}_{1} \frac{\text{ص}_{1\text{و}}}{\sigma_{1}} + \cdots\cdots + \text{ح}_{\text{م}-1} \frac{\text{ص}_{\text{م}-1،\text{و}}}{\sigma_{\text{م}-1}} + \text{أ}_{\text{م}} = \text{ط}_{\text{و}} \qquad (١٧)$$

وبأخذ الانْحرافات عن الوسط الحسابى ثم أخذ العزوم كما فى (١٤) ، نحصل على معامـــلات الارْتباط وفقا للتعريف السابق ٠ ومن جهة أخرى اذا رمزنا الى نسبة تباين الخطأ الى تبايـــن المتغير بالرمز

$$\text{ك}_{\text{ر}} = \frac{\text{ى}_{\text{ر}}}{\sigma^{2}_{\text{ر}}} \qquad (١٨)$$

فانه يمكن اعتبار أن هذه النسبة بمثابة مقياس لمدى الخطأ فى المتغير ولذلك يطلق عليها فريـــش اسم <u>كثافة الخطأ</u> disturbing intensity ٠ ويلاحظ أنه نظرا لكون :

$$\text{ص}_{\text{ر}} = \tilde{\text{ص}}_{\text{ر}} + \text{ط}_{\text{ر}}$$

فان أخذ تباين الطرفين وملاحظة أن $\tilde{\text{ص}}_{\text{ر}}$ مستقلة عن $\text{ط}_{\text{ر}}$ (تغايرهما صفر) :

$$\therefore\quad \sigma^{2}_{\text{ر}} = \frac{1}{\text{ن}}\ \tilde{\text{م}}_{\text{رر}} + \text{ى}_{\text{ر}} + \text{صفر}$$

∴ بقسمة الطرفين على $\sigma^{2}_{\text{ر}}$ فان

$$\text{ك}_{\text{ر}} = ١ - \text{مقدار موجب} \qquad (١٩)$$

حيث $\text{ك}_{\text{ر}}$ هى الاخْرى موجبة باعتبارها نسبة بين تباينين ٠ أى أن $\text{ك}_{\text{ر}}$ نسبة موجبة تقـــع بين الصفر والواحد الصحيح ٠ فهى صفر عند انعدام الخطأ ، وتصل الى الوحدة عندما يختفـــى الجزء الحقيقى ، ولذلك فكلما زادت النسبة عن الصفر واقتربت من الوحدة فان هذا يدل علـــى زيادة كثافة الخطأ فى مشاهدة المتغير ٠

وبالتعويض فى المعادلة (١٤) مع ملاحظة أن

$$\text{م}_{\text{ره}} = \text{ن}\;\text{ع}_{\text{ر}}\;\text{ع}_{\text{ه}}\;\text{ر}_{\text{ره}}$$

$$،\quad \text{ى}_{\text{ه}} = \text{ك}_{\text{ه}} \cdot \text{ع}_{\text{ه}}^{2}$$

$$\therefore \sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}-1} \frac{\text{ح}_{\text{ر}}}{\text{ع}_{\text{ر}}} \left(\text{ن}\;\text{ع}_{\text{ر}}\;\text{ع}_{\text{ه}}\;\text{ر}_{\text{ره}}\right) = \text{ن}\;\frac{\text{ح}_{\text{ه}}}{\text{ع}_{\text{ه}}} \left(\text{ك}_{\text{ه}} \cdot \text{ع}_{\text{ه}}^{2}\right)$$

وبقسمة الطرفين على $\text{ن}\;\text{ع}_{\text{ه}}$ نجد أن

$$\sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}-1} \text{ح}_{\text{ر}}\;\text{ر}_{\text{ره}} = \text{ح}_{\text{ه}}\;\text{ك}_{\text{ه}} \qquad (٢٠)$$

وهذه نفس مجموعة المعادلات التى يمكن الحصول عليها من (١٧) بضربها فى $\frac{\text{ص}_{\text{ه و}}}{\text{ع}_{\text{ه}}}$ ثم الجمع بالنسبة الى و ، والقسمة على ن .

٥ ــ <u>أسس التقديـــــر</u> :

بالرجوع الى المعادلات (٢٠) نلاحظ أنه من الممكن حل هذه المجموعة لو أننا استطعنـــا بوسيلة ما تقدير النسب ك . ولكن المشكلة هى أنه ليس من السهل الحصول على مثل هـــذه التقديرات ، ولذلك يمكن أن نفكر كالاتـــى :

طالما أننا استطعنا تحديد الحدود القصوى للنسب ك فاننا نستطيع أن نصل الى حدود للمعاملات ح تتناسب مع تلك الحدود . ولتوضيح ذلك نفرض أن لدينا <u>متغيرين فقـــــط</u> ص_0 ، ص_1 فتصبح (٢٠) مكونة من المعادلتين :

$$\text{ح}_0\;\text{ر}_{00} + \text{ح}_1\;\text{ر}_{10} = \text{ح}_0\;\text{ك}_0$$

$$،\quad \text{ح}_0\;\text{ر}_{01} + \text{ح}_1\;\text{ر}_{11} = \text{ح}_1\;\text{ك}_1$$

أى أن :

$$\left.\begin{array}{l} (1 - \text{ك}_0)\;\text{ح}_0 + \text{ر}_{01}\;\text{ح}_1 = \text{صفر} \\ \text{ر}_{01}\;\text{ح}_0 + (1 - \text{ك}_1)\;\text{ح}_1 = \text{صفر} \end{array}\right\} \qquad (٢١)$$

ولحل هاتين المعادلتين نعطى ح_{0} قيمة اعتبارية ولتكن ١ فتكون قيمة ح_{1} كالآتى

$$\text{ح}_{1} = \frac{1 - \text{ك}_{0}}{\text{ر}_{01}} \qquad (\text{من المعادلة الأولى})$$

$$= \frac{\text{ر}_{01}}{1 - \text{ك}_{1}} \qquad (\text{من المعادلة الثانية})$$

ولابد أن تتساوى القيمتان والا كانت المعادلتان غير متسقتين . ومعنى هذا التساوى أن :

$$\frac{1 - \text{ك}_{0}}{\text{ر}_{01}} = \frac{\text{ر}_{01}}{1 - \text{ك}_{1}}$$

$$\therefore \quad (1 - \text{ك}_{0})\,(1 - \text{ك}_{1}) = \text{ر}^{2}_{01} \qquad (٢٢)$$

وهذا هو شرط حل المعادلتين (٢١) الذى يمكن التوصل اليه باستخدام القواعد الرياضية المعروفة لحل المعادلات المتجانسة . اذ من المعلوم أنه اذا كان لدينا م معادلة متجانسة (خالية من الحد المطلق) فى م من المجاهيل ، فان حلها يستوجب أن يكون محدد معاملاتها يساوى الصفر . ففى (٢١) المجهولان هنا ح_{0} ، ح_{1} ولذلك لابد أن يكون المحدد الآتى مساويا للصفر :

$$\begin{vmatrix} (1 - \text{ك}_{0}) & \text{ر}_{01} \\ \text{ر}_{10} & (1 - \text{ك}_{1}) \end{vmatrix} = \text{صفر} \qquad (٢٢')$$

وهذه المعادلة الأخيرة تسمى <u>معادلة محددية</u> determinantal equation لأن أحد طرفيها محدد ، ومنها نستنتج المعادلة (٢٢) .

ولما كنا نجهل قيم النسب ك فان كل ما نستطيع عمله فى هذه المرحلة هو افتراض قيم مناسبة لها والتعرف على قيم ح_{1} المناظرة لها . وأنسب هذه الفروض هو ما يتفق مع الحدود التى أوجدناها من قبل . واضح أنه لا يمكن لأحدى النسبتين أن تبلغ حدها الأقصى الا اذا كان معامل الارتباط يساوى الصفر ، لأن القوس المناظر لها سوف يساوى الصفر . فاذا كان المعامل لا يساوى الصفر فلابد أن تكون قيمة كل من النسبتين أقل من الوحدة .

لذلك نناقش الموقف فى حالة الحدود الدنيا :

(١) النسبة $ك_{٠}$ = صفر ، أى أنه لا يوجد خطأ فى $ص_{٠}$ وبذلك لابد أن يتركز الخطأ فى $ص_{١}$. اذن : $(١ - ك_{١}) = ر_{٠١}^{٢}$

$$\therefore ك_{٠} = \text{صفر} \quad ، \quad ك_{١} = ١ - ر_{٠١}^{٢} \qquad (٢٣)$$

وبالتعويض نجد أنه باعتبار $ح_{٠} = -١$

$$\therefore ح_{١} = \frac{١}{ر_{٠١}} \qquad (٢٤)$$

(٢) النسبة $ك_{١}$ = صفر ، بحيث يتركز الخطأ كله فى $ص_{٠}$ ، فيكون

$$ك_{٠} = ١ - ر_{٠١}^{٢} \quad ، \quad ك_{١} = \text{صفر} \qquad (٢٣')$$

$$\text{ومنها} \quad ح_{٠} = -١ \quad ، \quad ح_{١} = ر_{٠١} \qquad (٢٤')$$

(٣) الخطأ يتوزع بين المتغيرين ، فى هذه الحالة يكون كل من $ك_{٠}$ ، $ك_{١}$ أكبر من الصفر ولكن أقل من $١ - ر_{٠١}^{٢}$ ، أى أن $(١ - ك_{١})$ أكبر من $ر_{٠١}^{٢}$ ، ولذلك فان $ح_{١}$ تكون أكبر من $ر_{٠١}$ ولكنها فى نفس الوقت أقل من $\frac{١}{ر_{٠١}}$ ، أى أنها تقع بين الحدين السابقين .

وبذلك يمكن الوصول الى النتيجة الهامة الآتية :

" اذا كانت هناك علاقة تامة بين متغيرين بكل منهما خطأ ، بحيث أن الخطأ فى أحدهما يكون مستقلا عن الخطأ فى الآخر ، فان معامل انحدار أحد المتغيرين على الآخر (مقاسين بالوحدات المعيارية) يقع بين معامل الارتباط بين المتغيرين ومقلوب هذا المعامل " .

وطبيعى أن اقتراب معامل الانحدار من أحد هذين الحدين يتوقف على كثافة الخطأ فى كل من المتغيرين .

ولكن طالما أن الكثافتين مجهولتين فان أفضل فرض يمكن الأخذ به هو أن الخطأ موزع بنفس الدرجة على المتغيرين ، وبالتالى تتساوى الكثافتان ، وكل منهما تساوى ك مثلا . وبالتعويض فى المعادلة (٢٢) نجد أن هذا يعنى أن

$$(١ - ك_{٠}) = (١ - ك_{١}) = \pm ر_{٠١}$$

ولذلك فان

$$\text{ح}_{1} = \pm 1$$

حيث الاشارة هى نفس أشارة معامل الارتباط • ولكن نلاحظ أن هذه القيمة العددية هـــى فى الواقع الوسط الهندسى بين الحدين اللذين وجدناهما من قبل للمعامل أى أن التقديـــر بهذه الطريقة هو

$$\text{ح}_{1} = \pm \sqrt{\text{ر}_{10} \times \frac{1}{\text{ر}_{01}}}$$

ومن ذلك توصل فريش الى <u>القاعدة التاليـــــة</u> :

اذا كانت مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرين هى

$$\underline{\underline{\text{ر}}} = \begin{bmatrix} \text{ر}_{10} & \text{ر}_{00} \\ \text{ر}_{11} & \text{ر}_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ر}_{10} & 1 \\ 1 & \text{ر}_{01} \end{bmatrix}$$

فان التقدير الذى نحصل عليه باعتبار الخطأ مركزا فى المتغير ص_{0} (ومنعـــدم مـــن ص_{1}) هو ر_{10} • وينتج من قسمة الحد الثانى على الاول فى السطر الاول • والتقدير الذى نحصـــل عليه باعتبار الخطأ مركزا فى ص_{1} هو $\frac{1}{\text{ر}_{01}}$ وهو خارج قسمة الحد الثانى على الاول فى السطـر الثانى • أما التقدير المتوسط الذى نستطيع قبوله فهو الجذر التربيعى لحاصل ضرب المقدارين ، أى $\frac{\text{ر}_{10}}{\text{ر}_{00}} \times \frac{\text{ر}_{11}}{\text{ر}_{01}} = \frac{\text{ر}_{11}}{\text{ر}_{00}}$ مع أعطاء الجذر اشارة ر_{10} •

ومعنى هذا أننا بدلا من أن نتحرك على السطور نتحرك على قطر المصفوفة •

ولكن التقدير الاول هو فى الواقع التقدير الذى نحصل عليه بالمربعات الصغرى لو كنا حسبنـا الانحدار باعتبار ص_{0} متغير تابع • والثانى هو تقدير المربعات الصغرى الناتج من اعتبـار ص_{1} متغير تابع • ولذلك يسمى كل من هذين الانحدارين <u>بالانحدارين الاوليين</u> Elementary Regressions • أما التقدير النهائى المستخرج بأخذ المتوسط فهو <u>انحدار قطـــــــرى</u> diagonal regression باعتباره مستمدا من الحركة على القطـــر •

وعلينا أن نلاحظ أن صحة هذه التقديرات تتوقف على تحقق الفروض الاساسيـــة :

(١) أن الخطئين مستقلين • فدلالة معامل الارْتباط تختفى اذا كان هناك ارتباط بين الخطئين لانْ بسط معامل الارْتباط هو :

$$\text{م}_{١٠} = \text{مح}_{\text{و}=١}^{\text{ن}} (\text{ض}_{\text{٠و}}\ \text{ض}_{\text{او}}) = \text{مح}_{\text{و}=١}^{\text{ن}} (\tilde{\text{ض}}_{\text{٠و}} + \text{ط}_{\text{٠و}}) \times (\tilde{\text{ض}}_{\text{او}} + \text{ط}_{\text{او}})$$

$$= \text{مح}_{\text{و}}\ \tilde{\text{ض}}_{\text{٠و}}\ \tilde{\text{ض}}_{\text{او}} + \text{مح}\ \tilde{\text{ض}}_{\text{٠و}}\ \text{ط}_{\text{او}} + \text{مح}\ \tilde{\text{ض}}_{\text{او}}\ \text{ط}_{\text{٠و}} + \text{مح}\ \text{ط}_{\text{٠و}}\ \text{ط}_{\text{او}}$$

فاذا كان الخطئين مستقلين اقتصر العزم على الحد الاوْل • والحدان الثانى والثالث يساويان الصفر نتيجة استقلال الاجْزاء الحقيقية عن الاخْطاء • ولكن وجود ارتباط بين الخطئين يؤدى الى أن يتأثر العزم بالحد الرابع (موجب أو سالب) • ولذلك فان الحدود التى ترسمها الانْحدارات الاوْلية تكون بعيدة عن الحدود الحقيقية •

(٢) أن معامل الارْتباط هو معامل الارْتباط فى المجتمع • لانْه لو كان محسوبا من عينة لامْكن أن يختلف عن القيمة الحقيقية بسبب أخطاء المعاينة • وبالتالى لا تكون الحدود المحسوبة باستخدامه هى الحدود الحقيقية • وهذا هو السبب فى أضافة الفرض الخاص بأن البيانات المعطاه هى بيانات المجتمع •

(٣) أن العلاقة المدروسة علاقة تامة بين الاجْزاء الحقيقية للمتغيرات بمعنى أنه لو انعدمت أخطاء المشاهدة لتحققت العلاقة بصورة تامة وبدون خطأ فى المعادلة •

ورغم أن عدم تحقق الفروض السابقة يشوب النتائج فان أهم الحالات الجديرة بالدراسة هى تلك الحالة التى ينهار فيها الفرض الاخْير • ليس بسبب عدم تحقق العلاقة بصورة تامة • بل بسبب وجود أكثر من علاقة بين المتغيرات • وهى ظاهرة أولاها فريش الجانب الاكْبر من عنايته وأطلق عليها أسم الازْدواج الخطى multicollinearity

٦ — الازْدواج الخطــى :

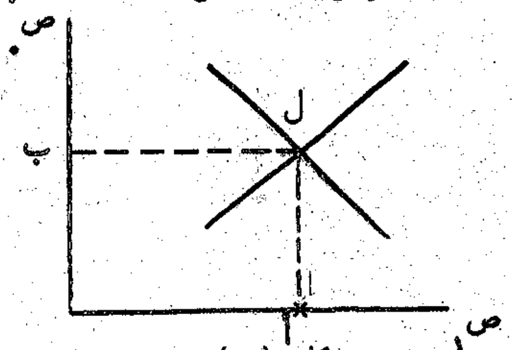
لكى نمثل لهذه الظاهرة • نفرض أن المتغير ص يمثل كمية مستهلكة من سلعة بينما $\text{ص}_{١}$ تمثل السعر الذى تستهلك عنده هذه الكمية • وبالتالى لو أن أخطاء المشاهدة انعدمت لكانت لدينا معادلة الطلب التى تفترضها النظرية • ولنقبل تجاوزا أنه فيما عدا أخطاء المشاهدة

تنعدم أخطاء المعادلة بحيث تتحقق العلاقة بدون خطأ • فهل معنى هذا أننا لو جمعنا عددا من المشاهدات لأمكننا التوصل الى تقدير معالم دالة الطلب (ولو بطريقة الانحدار القطرى) ؟

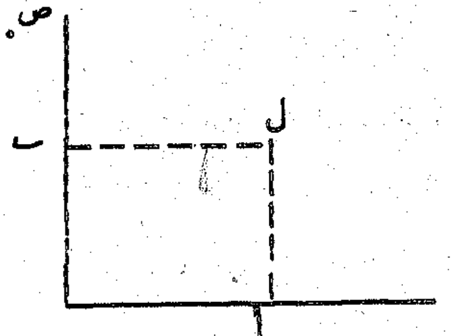
الواقع أن هذا ليس ضروريا لأنه لو رجعنا الى النظرية لاتضح لنا أن هناك علاقة أخرى بين نفس المتغيرين هى علاقة العرض ، وسنفرض أنها هى الأخرى علاقة خطية تامة • ويترتب على وجود العلاقتين فى وقت واحد أن القيم التى يمكن مشاهدتها هى الكمية والسعر عند التوازن • وطالما تبقى حالة الطلب والعرض ثابتتين فان المفروض أن نشاهد نفس الكمية ونفس السعر باستمرار فى جميع النقط • غير أن المشاهدات الفعلية تختلف عن هذه القيم بسبب أخطاء المشاهدة ، وأى محاولة لاستنباط معالم أى من المعادلتين لابد وأن تبوء بالفشل لأنها فى الواقع سوف تعكس مجرد الأخطاء فى المشاهدة • ولو أن هذه الأخطاء انتفت لما كان هناك غير سعر واحد وكمية واحدة لجميع النقط أى تنطبق النقط على بعضها البعض ، وواضح أن نقطة واحدة لا تكفى لتعيين معادلة خط مستقيم •

أى أنه لن يمكن مهما تعددت نقط المشاهدة أن نتوصل الى التقديرات المطلوبة • ويتضح هذا من أن كثافة الخطأ سوف تبلغ فى هذه الحالة الواحد الصحيح لكل من المتغيرين وبالتالى يكون معامل الارتباط هو الصفر • وبالتالى فان تقدير معامل الانحدار بأى من الانحدارين الأوليين هو خارج قسمة صفر على صفر ، وهو كمية غير محددة • فاذا حدث أن أدت الصدفة الى أن نحصل على مقادير تختلف عن الصفر فسوف نحصل على قيمة عددية لكل من التقديرين الأوليين ، ولكنها قيمة توقعها كمية غير محددة أى أنها قيم غير حقيقية بل مجرد أخطاء •

ولتوضيح هذه الحقائق نفرض أن المعادلات بين الأجزاء الحقيقية للمتغيرات كانت معلومة ، وبذلك يؤدى رسمهما فى نفس الشكل الى التوصل لنقطة التوازن (شكل ١) • ولكن نظرا لأن المعادلات مجهولة فان كل الذى نعلمه هو نقطة التوازن نفسها (شكل ٢) بين الأجزاء الحقيقية وهى النقطة ل = (أ ، ب) • والذى يحدث عمليا أن قيمة كل من المتغيرين

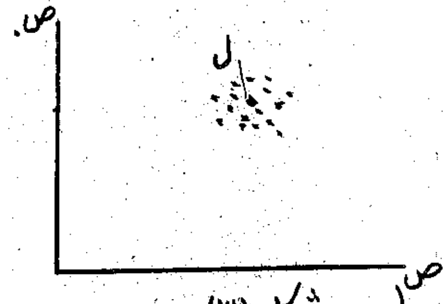


شكل (١)

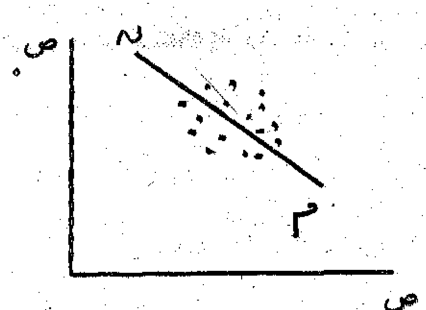


شكل (٢)

المشاهدة تختلف عن القيمة الحقيقية زيادة أو نقصا بسبب خطأ المشاهدة ويحدث نوع من شكل الانتشار كما في (شكل ٣) هو عبارة عن سحابة تتمدد في أحد الاتجاهين وفقا لشدة الخطأ في



شكل (٣)



شكل (٤)

كل من المتغيرين ، وتوافق الخطئين معا • بحيث لو حاولنا أن نوفق خطا بين هذه النقط لما دل هذا الخط على أي من المعادلتين الحقيقتين ولتحدد اتجاهه وفقا لسلوك الاخطاء (شكل ٤) • ولذلك يقال أن تقديرات المعالم التي تحدد الخط م ن هي دوال في الاخطاء •

اذن لكي يمكن الاطمئنان الى البيانات والتقديرات المشتقة منها يجب أن نطمئن الى عدم وجود ظاهرة الازدواج الخطي (أي تعدد المعادلات التامة بين نفس المتغيرات) • وقد كان من الممكن في المثال السابق أن نتوقع هذه الظاهرة على أساس التحليل النظري غير أن المشكلة تتعقد اذا حدث أن كانت العلاقات المزدوجة غير واضحة مباشرة للباحث مما يتطلب اجراء اختبار للتعرف عليها قبل الوصول الى التقديرات النهائية •

ولتوضيح امكان حدوث مثل هذه الظاهرة نفرض أن لدينا ٣ متغيرات $\tilde{ص}_{٠}$ ، $\tilde{ص}_{١}$ ، $\tilde{ص}_{٢}$ • وكانت هناك علاقة نريد دراستها بين $\tilde{ص}_{٠}$ ، $\tilde{ص}_{١}$ فقط • ولكن كانت هناك علاقتان أخريان بين المتغيرات الثلاث :

$$أ_{١٠}\tilde{ص}_{٠} + أ_{١١}\tilde{ص}_{١} = صفر$$
$$أ_{٢٠}\tilde{ص}_{٠} + أ_{١٢}\tilde{ص}_{١} + أ_{٢٢}\tilde{ص}_{٢} = صفر$$
$$أ_{٣٠}\tilde{ص}_{٠} + أ_{١٣}\tilde{ص}_{١} + أ_{٢٣}\tilde{ص}_{٢} = صفر$$

يبدو لاول وهلة أن الازدواج لا يصيب المعادلة الاولى التي نريد دراستها ولكنه يصيب المعادلتين الثانية والثالثة وهذا لا يهمنا • ولكن هذا غير صحيح لانه بحل المعادلة الثانية للتعبير عن

$\widetilde{\text{ص}}_{٢}$ بدلالة $\widetilde{\text{ص}}_{٠}$ ، $\widetilde{\text{ص}}_{١}$ ثم التعويض عن $\widetilde{\text{ص}}_{٢}$ فى المعادلة الثالثة فسوف نحصل على معادلـــة جديدة فيها $\widetilde{\text{ص}}_{٠}$ ، $\widetilde{\text{ص}}_{١}$ فقط ، مثل

$$\text{أ}_{٤}\,\widetilde{\text{ص}}_{٠} + \text{أ}_{١٤}\,\widetilde{\text{ص}}_{١} = \text{صفر}$$

وهذه المعادلة الجديدة المشتقة (وبالتالى لم تكن معلومة أصلا) تشبه المعادلة الاولى المـــراد تقدير معالمها ، مما يؤدى الى الازدواج بينهما فى النهاية ٠

لنفرض الآن أنه لم تكن هناك فى الواقع سوى المعادلتين الاولى والثانية وأننا كنا نريد تقديـــر معالم المعادلة الثانية ٠ مثلا المعادلة الاولى معادلة العرض بين الكمية والسعر بينما الثانيـــة هى معادلة الطلب وتضم بالاضافة الى نفس المتغيرين دخل المستهلكين ٠ فنلاحظ أننا لو قصرنـــا البحث على العلاقة بين الكمية والسعر فان العلاقة لا تكون تامة الا فى حالة المعادلة الاولى وبذلك نحصل على معادلة العرض لا الطلب ٠ فاذا أضفنا الدخل لكي ننتقل الى المعادلة الثانيـــــة المطلوبة فان الازدواج سوف يظهر لان وجود المعادلة الاولى يؤدى الى الاختلاط بينهما وبـــين الثانية فى الجزء الخاص بالعلاقة بين المتغيرين الاولين ٠

ولنعد مرة أخرى الى الحالة الاولى التي يظهر فيها الازدواج بين متغيرين فقط ٠ فى هذه الحالة نجد أن معامل الارتباط المحسوب سوف يكون فى الواقع صفرا بحيث يكون مقلوبـــه مالانهاية ، وبذلك تتسع الهوة بين التقديرين اللذين يحدان القيمة الحقيقية ٠ فاذا اختلفـت القيمة عن الصفر بسبب أخطاء المعاينة ، فسوف تظل قريبة من الصفر ، وتبقى الحدود بعيـــدة عن بعضها ٠ ولكن نفس الظاهرة تبدو اذا كانت العلاقة غير تامة (بسبب وجود متغيرات أخـــرى لم تؤخذ فى الحسبان) حيث يكون معامل الارتباط صغيرا فى هذه الحالة أيضا ٠ ولذلك يقـترح فريش اجراء ما يسمى بتحليل خرائط حزم الانحدار bunch map analysis بالاستعانـــة بمعاملات الانحدار المحسوبة من الانحدارات الاولية ٠

٧ ـ الانحدارات الاوليـــــة :

رأينا من قبل أنه لحساب معاملات انحدار متغير ص على متغيرات ع بطريقة المربعـــــات الصغرى فانه يلزم حساب العزوم ، وتكون التقديرات هى[1]

---

(١) المذكرة ٧١٧ (أ) صفحة ٤٣

$$\text{حـ}_{٨} = \frac{\text{م}}{\text{صع}} \; \text{ع ع}^{\text{م}-١}$$

وبلاحظ أن هذه الصيغة تعطى معاملات ع عندما يكون معامل ص هو ـ١ (حتى تظهر ص فى الطرف الآخر بمعامل = ١) .

فاذا اعتبرنا أن المتغير المطلوب ايجاد انحداره هو $\text{ص}_{٠}$ فان المتغيرات ع تصبح هى المتغيرات $\text{ص}_{\text{ر}}$ (ر = ١ ، ٢ ، ... ، م ـ١) . وهذا هو الانحدار الأولى رقم صفر ولذلك يحسن أن نكتب المعاملات بدليل عام هو الصفر للدلالة على ذلك بحيث يكون $\text{حـ}_{٠٠} = -١$

$$\text{حـ}_{٠٠} \text{ ، } \text{حـ}_{١٠} \text{ ، } \text{حـ}_{٢٠} \text{ ، ..... ، } \text{حـ}_{٠ \text{ ، } \text{م}-١}$$

وبتطبيق هذه الطريقة مع أخذ انحدار $\text{ص}_{١}$ على باقى المتغيرات فاننا نحصل على معاملات جديدة هى

$$\text{حـ}_{٠١} \text{ ، } \text{حـ}_{١١} \text{ ، } \text{حـ}_{٢١} \text{ ، .... ، } \text{حـ}_{١ \text{ ، } \text{م}-١}$$

حيث $\text{حـ}_{١١} = -١$. وواضح أنه لو اعتبرنا (فرضا) أن $\text{حـ}_{٠١}$ هى التى تساوى ـ١ فاننا نحصل على قيم جديدة تتناسب مع هذه القيم الأخيرة اذا ضربناها جميعا فى رقم واحد هو ($\frac{-١}{\text{حـ}_{٠١}}$) . وبذلك تظهر المعادلة بنفس صورة المعادلة الأولى (التى فيها $\text{ص}_{٠}$ فى الطرف الأيمن وباقى المتغيرات فى الطرف الأيسر) دون اخلال بالتناسب بين المعاملات الجديدة .

ونفس الشىء يمكن اجراؤه بحساب المعاملات لانحدار $\text{ص}_{٢}$ ، $\text{ص}_{٣}$ وهكذا ثم اعادة كتابة المعادلة بحيث تظهر $\text{ص}_{٠}$ دائما فى الطرف الأيمن بمفردها . وهذا يمكّن من المقارنة بين معاملات المتغير الواحد فى المعادلة المستخرجة من الانحدارات الأولية المختلفة .

غير أن الالتزام بالصيغة الأصلية لتقديرات المربعات الصغرى يعنى أن نحسب م من التقديرات وبالتالى نحتاج الى أيجاد مقلوب م من المصفوفات وهى عملية مرهقة . ولتفادى هذه المشكلة علينا أن نبحث عن طريقة تعطى جميع التقديرات فى عملية واحدة ، أو على الأقل تعطى أرقاما تتناسب مع هذه التقديرات . وللوصول الى هذه الطريقة نفرض أننا نريد تقدير معاملات انحدار

ص على ل من المتغيرات $ع_ر$. فنلاحظ أن مقلوب المصفوفة $\underline{م}_{عع}$ هو المصفوفة المرافقة مقسومة على المحدد $|\underline{م}_{عع}|$. فاذا كان مرافق الحد $م_{رهـ}$ (وهو عزم المتغير $ع_ر$ مع المتغير $ع_{هـ}$) هو $م^*_{هـ ر}$ أى المحدد الذى نحصل عليه بحذف السطر رقم ر ، والعمود رقم هـ ثم الضرب فى (−١) مرفوعة لأس = ر + هـ . وبذلك تكون مصفوفة المقلوب هى

$$\underline{م}_{عع}^{-1} = \left[م^*_{هـ ر} \right] \times \frac{1}{|\underline{م}_{عع}|}$$

ويكون تقدير المعامل $ح_ر$ هو

$$\hat{ح}_ر = \sum_{هـ=1}^{ل} م_{صهـ}\, م^*_{هـ ر} \times \frac{1}{|\underline{م}_{عع}|}$$

أى أن الأعداد ($\sum_{هـ} م_{صهـ}\, م^*_{هـ ر}$) تتناسب مع المعاملات $\hat{ح}_ر$ حيث عامل التناسب هو محدد المصفوفة $\underline{م}_{عع}$. ولكن هذه الأعداد يمكن الحصول عليها من مصفوفة عزوم جميع المتغيرات ص ، ع :

$$\begin{bmatrix} م_{صص} & م_{ص١} & م_{ص٢} & \cdots & م_{صل} \\ م_{١ص} & م_{١١} & م_{٢١} & \cdots & م_{١ل} \\ \hline م_{لص} & م_{ل١} & م_{ل٢} & \cdots & م_{لل} \end{bmatrix}$$

فالمرافقات $م^*_{هـ ر}$ هى مرافقات عناصر السطر رقم ر فى المصفوفة $\underline{م}_{عع}$ أى المصفوفة التى نحصل عليها بحذف السطر والعمود الأولين من المصفوفة السابقة . وعملية الضرب والجمع السابقة هى فى الواقع عملية حساب قيمة المحدد الجزئى الذى نحصل عليه بحذف العمود الأول والسطر رقم ر ، أى أنه مرافق الحد $م_{رص}$ أو $م^*_{ص ر}$.

كما نلاحظ أن محدد المصفوفة $\underline{م}_{عع}$ هو مرافق الحد $م_{صص}$. ومعنى هذا أننا لو حسبنا مرافقات العمود الأول لتناسبت مع القيم السالبة للمعاملات المطلوبة ، نظرا لأن أول هذه

المرافقات هو $|\underline{م}_{عع}|$ بدلا من $-|$ بحيث لو قسمنا هذه المرافقات على القيمة السالبة لأولها لحصلنا على التقديرات المطلوبة ٠

ولذلك فنحن اذا حسبنا مصفوفة المرافقات للمصفوفة السابقة لتناسب السطر الأول مع القيم السالبة للمعاملات حيث عامل التناسب هو المحدد $|\underline{م}_{عع}|$ ٠ وبنفس المنطق نجد أن السطر الثانى يتناسب مع القيم السالبة لمعاملات انحدار $ع_١$ على باقى المتغيرات وهكذا ٠

نستنتج من ذلك أنه لو كانت لدينا مصفوفة معاملات الارتباط $\underline{ر}$ (أى العزوم فى حالة استخدام الوحدات المعيارية) فان الانحدارات الأولية يمكن الحصول عليها من سطور المرافقة $\underline{ر}^{*}$ ، مع ملاحظة تغيير أشارة الحد الأول من السطر (أو جميع الحدود عدا الأول) ٠ وحتى يمكن ضمان أن يكون معامل $ص_٠$ موجبا باستمرار فاننا نستخدم القاعدة الآتية :

(١) نوجد مصفوفة مرافقات مصفوفة الارتباط ٠

(٢) كل سطر يبدأ برقم موجب نغير اشارة حدوده الأخرى ٠

وكل سطر يبدأ برقم سالب نغير اشارة أول حدوده ونترك الباقين على حالهم ٠

<u>مثال (١)</u> : الآتى عزوم ثلاثة متغيرات $ص_٠$ ، $ص_١$ ، $ص_٢$ على التوالى :

$$\underline{م} = \begin{bmatrix} ١٠٧٩\,٩٦٣ & ١٢٤\,٩٥٣ & ٣٠٣\,٤٥٩ \\ ١\,٢٣٢\,١٨١ & ١\,١٦٦\,٤٥٧ & ١٢٤\,٩٥٣ \\ ٥\,٣١٨\,٤٩١ & ١\,٢٣٢\,١٨١ & ١\,٠٧٩\,٩٦٣ \end{bmatrix}$$

ولتحويل هذه المصفوفة الى مصفوفة ارتباط نحسب الانحرافات المعيارية بأخذ جذور التباينات الواقعة على القطر :

$$ع_٠ = \sqrt{٣٠٣\,٤٥٩} = ٥٥٠{,}٨٧١$$

$$ع_١ = \sqrt{١\,١٦٦\,٤٥٧} = ١٠٨٠{,}٠٢٦$$

$$ع_٢ = \sqrt{٥\,٣١٨\,٤٩١} = ٢٣٠٦{,}١٨٥$$

ولتسهيل حساب معاملات الارتباط نضرب كل من هذه الانحرافات فيها جميعا على التوالى ونرتب حواصل الضرب فى مصفوفة كالآتى :

$$\left[\text{ص ر ص هـ}\right] = \begin{bmatrix} \text{١ ٢٧٠ ٤١٠} & \text{٥٩٤ ٩٥٥} & \text{٣٠٣ ٤٥٩} \\ \text{٢ ٤٩٠ ٧٤٠} & \text{١ ١٦٦ ٤٥٧} & \text{٥٩٤ ٩٥٥} \\ \text{٥ ٣١٨ ٤٩١} & \text{٢ ٤٩٠ ٧٤٠} & \text{١ ٢٧٠ ٤١٠} \end{bmatrix}$$

ونحسب معا ملات الارْتباط بقسمة كل عزم على العدد المناظر له في هذه المصفوفة الاخيرة :

$$\underline{\underline{\text{ر}}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٨٥٠١} & \text{٠ر٢١٠٠} & \text{١ر٠٠٠٠} \\ \text{٠ر٤٩٤٧} & \text{١ر٠٠٠٠} & \text{٠ر٢١٠٠} \\ \text{١ر٠٠٠٠} & \text{٠ر٤٩٤٧} & \text{٠ر٨٥٠١} \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة المرافقات هي :

$$\underline{\underline{\text{ر}}}^{*} = \begin{bmatrix} -\text{٠ر٧٤٦٢} & \text{٠ر٢١٠٥} & \text{٠ر٧٥٥٣} \\ -\text{٠ر٣١٦٢} & \text{٠ر٢٧٧٣} & \text{٠ر٢١٠٥} \\ \text{٠ر٩٥٥٩} & -\text{٠ر٣١٦٢} & -\text{٠ر٧٤٦٢} \end{bmatrix}$$

ومنها نحصل على المعاملات بأحداث تغييرات الاشارات اللازمة

$$\underline{\underline{\text{ح}}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٧٤٦٢} & -\text{٠ر٢١٠٥} & \text{٠ر٧٥٥٣} \\ \text{٠ر٣١٦٢} & -\text{٠ر٢٧٧٣} & \text{٠ر٢١٠٥} \\ \text{٠ر٩٥٥٩} & -\text{٠ر٣١٦٢} & \text{٠ر٧٤٦٢} \end{bmatrix}$$

فاذا كانت انحرافات المتغيرات عن الوسط الحسابي مقاسة بوحدات من الانْحراف المعياري هي ح (مثلا) :

$$\text{ح}_{\text{رو}} = \frac{\text{ص}_{\text{رو}} - \bar{\text{ص}}_{\text{ر}}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ض}_{\text{رو}}}{\text{ع}_{\text{ر}}}$$

فان الانْحدارات الاولية الثلاث هي :

٠ر٧٥٥٣ $ح_{٠و}$ = −٠ر٢١٠٥ $ح_{١و}$ + ٠ر٧٤٦٢ $ح_{٢و}$ + $ق_{٠و}$ (ص٠ متغير تابع)

٠ر٢١٠٥ $ح_{٠و}$ = −٠ر٢٧٧٣ $ح_{١و}$ + ٠ر٣١٦٢ $ح_{٢و}$ + $ق_{٠و}$ (ص١ متغير تابع)

٠ر٧٤٦٢ $ح_{٠و}$ = −٠ر٣١٦٢ $ح_{١و}$ + ٠ر٩٥٥٩ $ح_{٢و}$ + $ق_{٠و}$ (ص٢ متغير تابع)

وبالتالى اذا أردنا جعل معامل $ح_{٠و}$ هو الوحدة فاننا نقسم الطرفين على المعامل الذى يظهر فى الطرف الايمن • فالمعادلة الاولى مثلا تصبح

$$ح_{٠و} = -\frac{\text{٠ر٢١٠٥}}{\text{٠ر٧٥٥٣}}\, ح_{١و} + \frac{\text{٠ر٧٤٦٢}}{\text{٠ر٧٥٥٣}}\, ح_{٢و} + ق'_{٠و}$$

−٢٧٨٧ر٠ ٩٨٨ر٠

واذا أردنا استنتاج المعاملات بالوحدات الاصلية (أى أ بدلا من حـ) فاننا نستخدم (١٦) وبذلك يكون

$$\text{معامل ص}_{١}\ \text{هو}\ = -\frac{\text{٠ر٢١٠٥} \times \text{٥٥٠ر٨٧١}}{\text{٠ر٧٥٥٣} \times \text{١٠٨٠ر٠٢٦}} = -\text{٠ر١٤٢٣}$$

$$\text{معامل ص}_{٢}\ \text{هو}\ = \frac{\text{٠ر٧٤٦٢} \times \text{٥٥٠ر٨٧١}}{\text{٠ر٧٥٥٣} \times \text{٢٣٠٦ر١٨٥}} = \text{٠ر٢٣٤٠}$$

أى أن المعادلة تكون :

$$ض_{٠و} = -\text{٠ر١٤٢٣}\ ض_{١و} + \text{٠ر٢٣٤٠}\ ض_{٢و} + ق''_{٠و}$$

تمرين (١) أحسب الانحدارين الاوليين الاخرين بالوحدات الاصلية

قارن النتائج بتلك التى تحصل عليها بالطريقة المباشرة مستخدما العزوم الاصلية •

٨ — تحليل حزم الانحـــدار :

ان أساس نظرية الانحدار القطرى هو السعى للتوصل الى معاملات انحدار هى فى الواقع متوسط للانحدارات الاولية المختلفة • ولاشك أن قوة أى متوسط تستمد من صِغَر التشتت حوله • وبالتالى تقارب قيم المفردات المختلفة منه • ولذلك فقد يكون من المفيد اجراء دراسة لمعاملات الانحدار الاولية قبل الركون الى هذا المتوسط

غير أن الظاهرة الاولى بالدراسة هى ظاهرة الازدواج الخطى • اذ أنه لا يمكن التوصـــل

الى أى تقدير سليم اذا وجدت هذه الظاهرة ٠ وقد اتضح لنا من دراسة حالة متغيرين أن وجود هذه الظاهرة يجعل العناصرالتى تحسب منها المعاملات أصفارا أو قريبة من الصفر مما يعنى أن حدود المصفوفة $\underline{\underline{v}}^{*}$ تكون كلها قريبة من الصفر ٠ كما أن المعاملات المحسوبة تكون أشد ما تكون تباعدا عن بعضها البعض بحيث تتراوح ما بين صفر ومالانهاية ، فيما عدا الأخطاء العشوائية ٠ كذلك وجدنا أنه قد لاتظهر ظاهرة الازدواج الا بعد ادخال متغيرات أضافية فى المعادلة اذا حدث وأن كانت المعادلات المزدوجة تضم هذه المتغيرات الاضافية ٠

وللتعبير عن هذه الصفات كلها اقترح فريش رسم ما يسمى خرائط حزم الانحدار Bunch maps ٠ وتتم هذه الخرائط برسم محورين الافقى لمعامل المتغير التابع ($ص_{٠}$) والرأسى لمعامل أحد المتغيرات المتبوعة ، بحيث يكون معامل المتغير التابع دائما موجبا (وهو ما راعيناه فعلا عن طريقة قاعدة تغيير الاشارات) بينما معامل المتغير المتبوع موجب أو سالب وفقا للاحوال ٠ ثم نعين نقطة احداثياها المعاملان فى أحد الانحدارات الاولية ٠ ثم نوصل هذه النقطة بنقطة الاصل فنحصل على خط يسمى شعاع beam ٠ وعلى ذلك تتكون من أشعة الانحدارات الاولية فى مجموعها ما يشبه الحزمة bunch تماما مثل الحزمة الضوئية ٠

فاذا تأملنا هذه الحزمة أمكننا الحكم على الظواهر التى ذكرناها بعاليه ٠ فعندما تكون حدود $\underline{\underline{v}}^{*}$ صغيرة فان هذا ينعكس فى صغر أطوال الاشعة ٠ كذلك عندما تتباعد التقديرات عن بعضها البعض فان الحزمة تنفرج أشعتها انفراجا كبيرا بعكس الحال عندما تتقارب التقديرات حيث تضيق الحزمة وبالتالى يقل الاختلاف بين التقديرات المحسوبة من الانحدارات الاولية المختلفة مما يدل على الاقتراب من العلاقة التامة

ولكى يمكن تقصى مصادر الازدواج الخطى من جهة ومعرفة المرحلة التى تصبح العلاقة فيها تامة ، يقترح فريش أن نجرى العمل كالاتى :

لنفرض أن لدينا علاقة تفسر (اقتصاديا) متغيرا $ص_{٠}$ بدلالة ل من المتغيرات $ص_{ر}$ وبدأنا بدراسة معامل المتغير الاول $ص_{١}$ ٠ فى هذه الحالة نرسم عددا من الخرائط لهذا المعامل ، أولها يقتصر على العلاقة بين $ص_{٠}$ ، $ص_{١}$ ٠ ثم (ل ـ ١) من الخرائط كل منها يضم متغيرا ثالثا بالاضافة الى $ص_{٠}$ ، $ص_{١}$ (من بين المتغيرات $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ ، ٠٠٠ ، $ص_{ل}$) ٠ ثم

مجموعة ثالثة لنفس المعامل ضمن معادلات كل منها يضم متغيرين آخرين بجانب $ص_١$ ، $ص_٢$ وهكذا حتى الخريطة الأخيرة التي تضم جميع المتغيرات معا . وما نجريه بالنسبة لمعامل $ص_١$ نجريه لمعامل كل متغير آخر على حدة .

وعند رسم حزمة معامل معين نميز الشعاعين الخاصين بالمتغيرين اللذين ندرس العلاقة بينهما ($ص_٠$ ، $ص_١$ وهكذا) بدائرة على طرف كل منهما ويسميان بالشعاعين الرئيسيين leading beams . ويعطى كل من الأشعة رقما هو رقم المتغير الذي يعتبر تابعا في حساب الانحدار الذي يظهر فيه .

وفي كل حالة من الحالات نقارن أشعة كل مجموعة بأشعة مجموعة تقل عنها بمتغير وتعتبر التغيرات التي تصيب شكل الحزمة بين المجموعتين ناجمة عن أثر المتغير المضاف الى المجموعة الأصغر . فمثلا بمقارنة حزمة $ص_١$ في المجموعة ($ص_٠$ ، $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$) بحزمتها في المجموعة ($ص_٠$ ، $ص_١$ ، $ص_٢$) نتعرف على أثر $ص_٣$ ومقارنتها بحزمتها في المجموعة ($ص_٠$ ، $ص_١$ ، $ص_٣$) نتعرف على أثر $ص_٢$ وهكذا . وهنا نقابل حالة من ثلاث :

(١) الحزمة تتحسن ، بمعنى أن تقاربها يزداد والأشعة جميعا لها نفس الاتجاه وطولها كبير نسبيا ، وتقع الأشعة بين الشعاعين الرئيسيين فان هذا يشير الى أن المتغير الذي أضيف الى المجموعة وأدى الى التحسن متغير مفيد useful بالنسبة لتقدير المعامل الذي ندرسه .

(٢) الحزمة لا يصيبها أي تحسن أو تدهور . ويقال في هذه الحالة أن المتغير الجديد متغير دخيل superfulous بمعنى أنه لا ينتمي الى العلاقة ولذلك لم يسهم في تحسنها .

(٣) الحزمة تسوء حيث تقصر أطوال الأشعة ويصيب الحزمة انفجار بحيث تتباعد الأشعة عن بعضها البعض ، وقد يختلف اتجاهها فيكون بعضها موجب الميل والآخر سالبه ، كما قد تخرج بعض الأشعة عن حدود الأشعة الرئيسية . وفي هذه الحالة يقال أن المتغير ضار detrimental لأنه يهدم علاقة كانت قائمة من قبل وهذا يعتبر انذارا بظهور الازدواج الخطي مما يستلزم استبعاد هذا المتغير من العلاقة .

وباستخدام هذا الاختبار نستطيع أن نتوصل الى أكبر مجموعة ليس بها ازدواج خطى ونقوم بعدئذ بحساب الانحدارات القطرية لها • وقد يؤدى التحليل الى التوصل الى أكثر من مجموعة تحقق هذا الشرط مما يشير الى وجود أكثر من معادلة تتفق فى بعض المتغيرات ولكن ليس فيها جميعا •

<u>مثال (٢)</u> : قام فريش بتكوين مثال افتراضى ليوضح به النظرية السابقة توصل فيه الى مصفوفة ارتباط بين ٥ متغيرات كالاتى[1] :

ر/هـ	٠	١	٢	٣	٤
٠	١ر٠٠٠٠	-٠ر١٢١٦	٠ر٦٥٦٨	٠ر٧٥٢٥	-٠ر٢٢٤٥
١		١ر٠٠٠٠	٠ر٦٥٧٧	-٠ر٧٣٢٩	٠ر٢١٢٢
٢			١ر٠٠٠٠	٠ر٠١٤٤	-٠ر٠٤٠٢
٣				١ر٠٠٠٠	-٠ر٢٨٠٢
٤					١ر٠٠٠٠

وسوف نحاول توضيح القواعد السابقة بالنسبة لمعامل انحدار $ص_{٠}$ على $ص_{١}$ •

(١) نبدأ بالمجموعة (٠ ، ١) أى التى فيها $ص_{٠}$ ، $ص_{١}$ فقط • فتكون

$$\underline{\underline{ر}} = \begin{bmatrix} \text{١ر٠٠٠٠} & \text{-٠ر١٢١٦} \\ \text{-٠ر١٢١٦} & \text{١ر٠٠٠٠} \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{\underline{ر}}^{*} = \begin{bmatrix} \text{١ر٠٠٠٠} & \text{٠ر١٢١٦} \\ \text{٠ر١٢١٦} & \text{١ر٠٠٠٠} \end{bmatrix}$$

ووفقا لقواعد الاشارات تكون

$$\underline{\underline{ح}} = \begin{bmatrix} \text{١ر٠٠٠٠} & \text{-٠ر١٢١٦} \\ \text{٠ر١٢١٦} & \text{-١ر٠٠٠٠} \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن القاعدة أعطتنا المعاملين $-\frac{\text{٠ر١٢١٦}}{\text{١ر٠٠٠٠}}$ ، $-\frac{\text{١ر٠٠٠٠}}{\text{٠ر١٢١٦}}$ أى معامل

(1) Ragnar Frisch: Statistical Confluence Analysis by means of Complete Regresion Systems - Part IV.

الارتباط ومقلوبه كما سبق أن استنتجنا مباشرة ٠ ويوضح شكل (١) هذه النتائج ٠ فالسطر الاول يعطى ٠٠٠ر١ على المحور الافقى (ص) ، ـ٠ر١٢١٦ على المحور الرأسى ($ص_1$) ٠ وبالمثل بالنسبة للسطر الثانى ٠ وتظهر الحزمة شديدة الانفراج مما يشير الى ضعف العلاقة ولذلك نضيف الى المجموعة متغيرا ثالثا ٠

(٢) لدينا ثلاث مجموعات ثلاثية هى (٠ ، ١ ، ٢) ، (٠ ، ١ ، ٣) ، (٠ ، ١ ، ٤) ٠
ولذلك نحتاج الى ثلاث مصفوفات مرافقات كالاتـــى :

للمجموعة (٠ ، ١ ، ٢)

ك* =

ـ٠ر٧٣٦٨	٠ر٥٥٣٥	٠ر٥٦٧٤
ـ٠ر٧٣٧٥	٠ر٥٦٨٦	٠ر٥٥٣٥
٠ر٩٨٥٢	ـ٠ر٧٣٧٥	ـ٠ر٧٣٦٨

وتكون مصفوفة المعاملات هى :

ج =

٠ر٧٣٦٨	ـ٠ر٥٥٣٥	٠ر٥٦٧٤
٠ر٧٣٧٥	ـ٠ر٥٦٨٦	٠ر٥٥٣٥
٠ر٩٨٥٢	ـ٠ر٧٣٧٥	٠ر٧٣٦٨

وهنا نجد أن معامل $ص_1$ له ثلاث قيم مستمدة من الانحدارات الثلاثة الاولية وهى

(ـ٠ر٥٥٣٥) / (٠ر٥٦٧٤) ، (ـ٠ر٥٦٨٦) / (٠ر٥٥٣٥) ، (ـ٠ر٧٣٧٥) / (٠ر٧٣٦٨)

أولاهما مستمدان من الشعاعين الرئيسيين ٠ أى أننا نستخدم عمود $ص_1$ مع عمود ص ٠ وطبيعى أننا لو كنا نريد دراسة معامل $ص_2$ لاستخدمنا العمود الثالث ($ص_2$) مع العمود الاول أيضا ٠ ويبين شكل (٢) حزمة معامل $ص_1$ فى هذه المجموعة ويتضح من الشكل أن ادخال المتغير $ص_2$ أدى الى ضيق الحزمة الاصلية بصورة واضحة فضلا عن أن الشعاع (٢) واقع بين الشعاعين الرئيسيين ، كما أنه أطول منهما وأدى فى نفس الوقت الى قصرهما بعض الشئ ٠ وكل هذا يشير الى أن المتغير $ص_2$ أساسى فى العلاقة ، أى أنه متغير مفيد ٠

وبنفس الطريقة ندرس أثر ادخال $ص_3$ فنجد أن مصفوفة المرافقات تؤدى الى مصفوفة المعاملات التاليــة :

$$\underline{\underline{ج}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٤٦٢٩} & \text{٠ر٤٢٩٩} & \text{٠ر٦٦٣٤} \\ \text{٠ر٤٢٩٩} & \text{٠ر٤٣٣٧} & \text{٠ر٦٤١٤} \\ \text{٠ر٦٦٣٤} & \text{٠ر٦٤١٤} & \text{٠ر٩٨٥٢} \end{bmatrix}$$

وهنا نجد أن معامل $ص_1$ يصبح موجب الاشارة كما أن شكل (٣) يبين أن خصائص الحزمة الجديدة تماثل خصائص السابقة ، بل ان ادخال $ص_3$ نجح فى تغيير اشارة المعامل من سالب الى موجب ولذلك ظهر الرسم فى الربع الأول لا الرابع كما كان الحال سابقا . ويكون $ص_3$ هو الآخر متغيرا مفيدا للعلاقة المدروسة . ولكن ما معنى أن المعامل تغير بصورة واضحة رغم قوته فى الحالين ؟ من الممكن أن نتوقع أن هناك علاقتين مختلفتين قويتين (وقد تكونان تامتين) يكون المعامل سالبا فى أحدهما وموجبا فى الأخرى (مثلا قد تكون هناك علاقة طلب فيها معامل السعر $ص_1$ سالبا وتضم متغيرا مثل الدخل $ص_2$ وأخرى علاقة عرض فيها معامل السعر $ص_1$ موجبا وتضم متغيرا مثل تكلفة الانتاج $ص_3$) ولكن حتى الآن لا يمكننا الجزم بشىء حتى نختبر الازدواج ، لأنه لو كانت المجموعتان (٠ ١ ٢) ،(٠ ١ ٣) تمثلان معادلتين تامتين فان المجموعة الكبرى (٣٢١٠) سوف تمثل علاقة بين متغيرات تربطها علاقتان أى بها ازدواج .

وقبل الانتقال الى هذه المجموعة الرباعية ندرس المجموعة (٤١٠) فنجد أن المعاملات هى :

$$\underline{\underline{ج}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٩٥٥٠} & \text{ـ٠ر٠٧٣٩} & \text{ـ٠ر١٩٨٨} \\ \text{٠ر٠٧٣٩} & \text{ـ٠ر٩٤٩٦} & \text{٠ر١٨٤٩} \\ \text{٠ر١٩٨٨} & \text{ر١٨٤٩} & \text{ـ٠ر٩٨٥٢} \end{bmatrix}$$

وبالرجوع الى شكل (٤) نجد أن الحزمة لم تتحسن عن الوضع الأصلى فى المجموعة (١٠) وفى نفس الوقت ظهر شعاع المتغير ٤ قصيرا وخارج الحزمة بل انه يأخذ أشارة عكسية . ولذلك يمكن أن نعتبر أن هذا المتغير دخيل على العلاقة بمعنى أننا نستطيع أن نستبعده منها دون أن تتغير النتيجة بشكل يذكر . وبهذا يصبح علينا أن ننتقل الى مجموعات المتغيرات الرباعية .

(٣) توجد ثلاث مجموعات رباعية هى (٣٢١٠) ،(٤٢١٠) ، (٤٣١٠) تضم $ص_0$ ، $ص_1$ ولنبدأ بأولاها . فنجد أن مصفوفة المرافقات تؤدى الى المعاملات الآتية :

$$\underline{\underline{\text{ح}}} = \begin{bmatrix} 0.107 & 0.117 & -0.019 & 0.163 \\ -0.108 & 0.121 & -0.164 & 0.019 \\ -0.003 & 0.159 & -0.121 & 0.117 \\ 0.162 & -0.003 & 0.108 & 0.107 \end{bmatrix}$$

وكما توقعنا عند دراسة المجموعات الثلاثية ، فان هذه المجموعة يظهر فيها الازدواج الخطي بصورة واضحة لأن جميع الأعداد قريبة من الصفر فضلا عن أن أشارات المعاملات غير ثابتة وانفراج الحزمة كبير كما يظهر من شكل (٥) الذى اضطرنا فيه الى مضاعفة مقياس الرسم بالنسبة لمقاييس الأشكال السابقة حتى يمكن رسم الأشعة . وعلى هذا فان هذا الشكل لا يمكن مقارنته بالأشكال الأخرى الا بعد مراعاة اختلافات وحدات القياس . ولكن يجب أن نلاحظ أن أى شكل تكون وحدات القياس فيه متماثلة فى المحورين .

ويلاحظ أن الشعاعين ٢ ، ٣ طولهما قريب من طولى الشعاعين الرئيسيين ولكنهما بعيدين ومختلفين فى الاتجاه ، وهذا يؤكد ما توقعناه من وجود علاقتين مختلفتين (٢١٠) ، (٣١٠) وأن محاولة الجمع بين جميع المتغيرات الأربعة فى علاقة واحدة قد باءت بالفشل لأنها تنطوى على ازدواج خطى أى وجود أكثر من علاقة بين جميع المتغيرات أو بعضها .

فاذا انتقلنا الى المجموعة (٤٢١٠) وجدنا أن مصفوفة المعاملات هى

$$\underline{\underline{\text{ح}}} = \begin{bmatrix} 0.196 & 0.6679 & -0.5054 & 0.5096 \\ 0.260 & 0.6805 & -0.5284 & 0.5054 \\ 0.306 & 0.9014 & -0.6805 & 0.6679 \\ 0.162 & 0.306 & -0.260 & 0.196 \end{bmatrix}$$

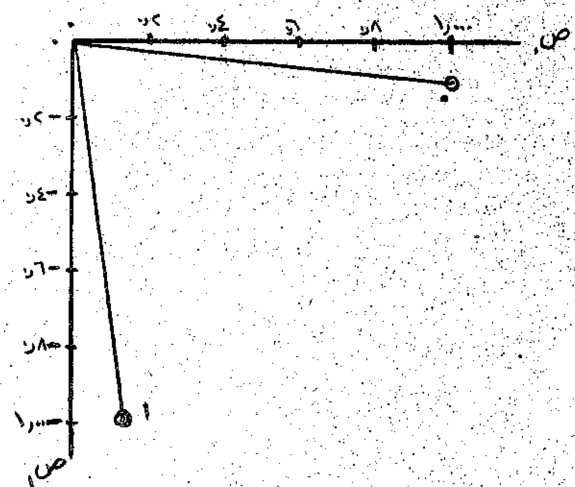
وبالمقارنة بالمجموعة (٢١٠) نجد أن أضافة المتغير ٤ لم تؤثر فى الحزمة الأصلية بل ان شعاع هذا المتغير قصير نسبيا وواقع خارج الحزمة مما يشير الى أن المتغير ٤ متغير دخيل على هذه العلاقة . ومن جهة أخرى لو أننا قارنا شكل (٦) وشكل (٤) لاتضح أن ادخال المتغير ٢ على المجموعة (٤١٠) أدى الى تحسنها بصورة واضحة أى أن هذه العلاقة لا تحوى على ازدواج خطى ولكن ادخال ٤ فيها غير لازم .

كذلك نجد أن معاملات المجموعة (٤٣١٠) هى

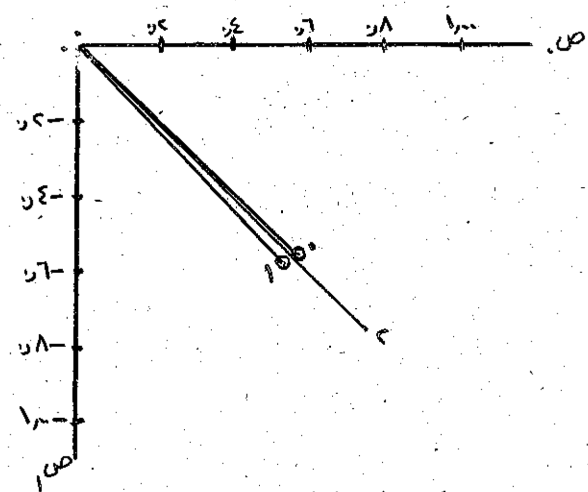
ح =

٠ر٤٢٦٥	٠ر٣٩٦٣	٠ر٦٠٨٨	ـ٠ر٠٠٩٣
٠ر٣٩٦٣	٠ر٣٩٩٥	٠ر٥٨٨٥	ـ٠ر٠٠٨٨
٠ر٦٠٨٨	٠ر٥٨٨٥	٠ر٩٠١٤	٠ر٠٠٩٠
٠ر٠٠٩٣	٠ر٠٠٨٨	ـ٠ر٠٠٩٠	ـ٠ر٠١٥٩

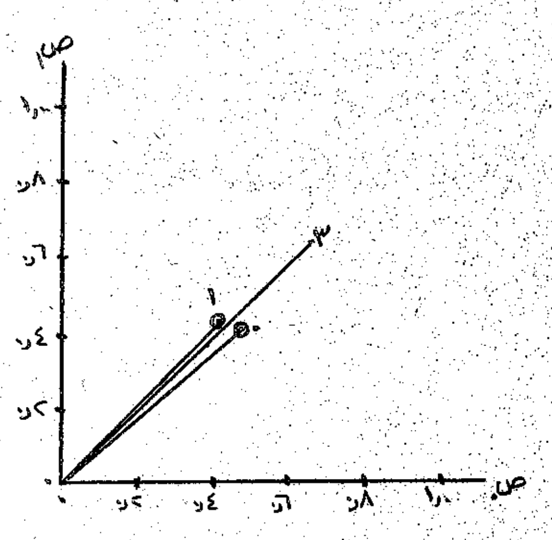
خرائط حزم معامل ص١ .



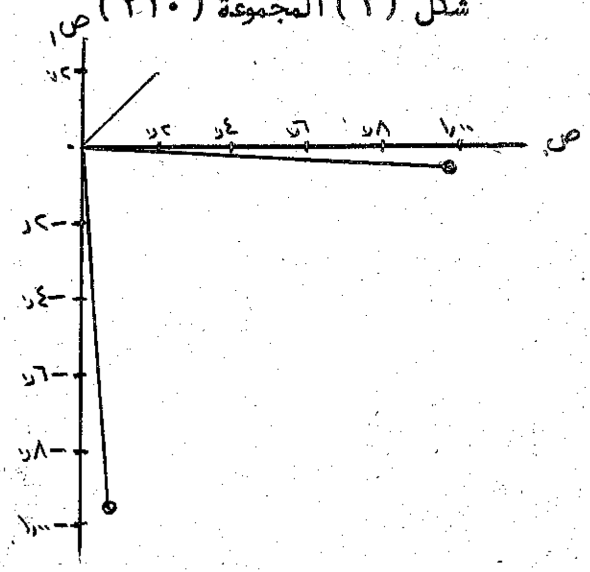
شكل (١) المجموعة (١٠)



شكل (٢) المجموعة (٢١٠)



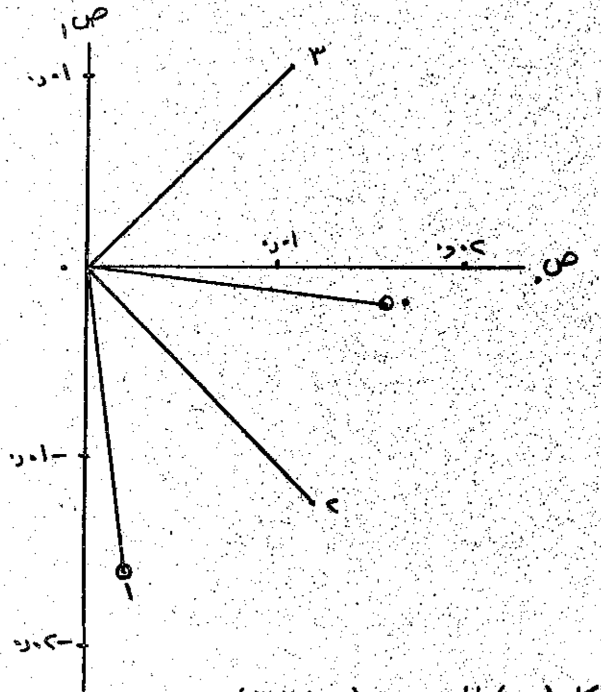
شكل (٣) المجموعة (٣١٠)



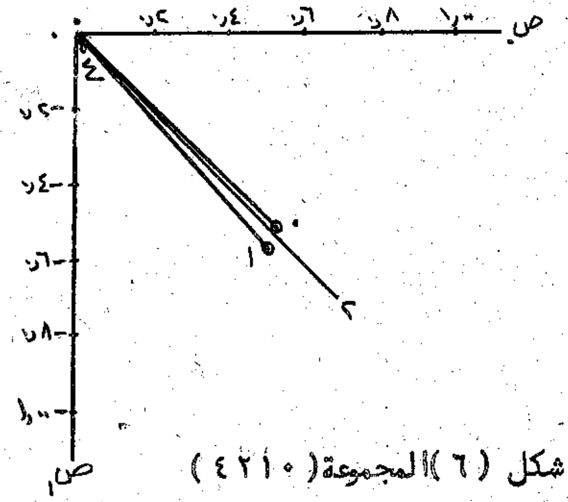
شكل (٤) المجموعة (٤١٠)

مثال عن التأثير المشترك confluence
ص. استهلاك ، ص١ دخل ، ص٢ زمن
أولاً نجد العلاقة غير وثيقة بين ص. ، ص١ (لأنها غير تامة)
ندخل ص٢ منطقة الازدواج . لنفرض أن العلاقة التامة
هي $\tilde{ص}_. = 45 + 0.8\,ص_1 + 0.2\,ص_2$ (1)
العلاقة التي لم تشتبه هي علاقة الدخل بالزمن
$\tilde{ص}_1 = 800 + 40\,ص_2$
أي أن $\tilde{ص}_2 = -20 + 0.025\,ص_1$ (2)
باستخدام هذه المعادلة تصبح (1) إما
إما $ص_. = 44.6 + 0.8005\,ص_1$ (3)
أو $\tilde{ص}_. = -$

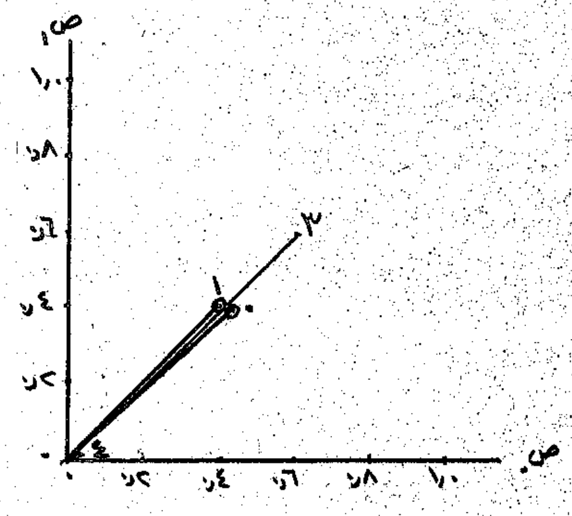
تابع خرائط حزم معامل ص



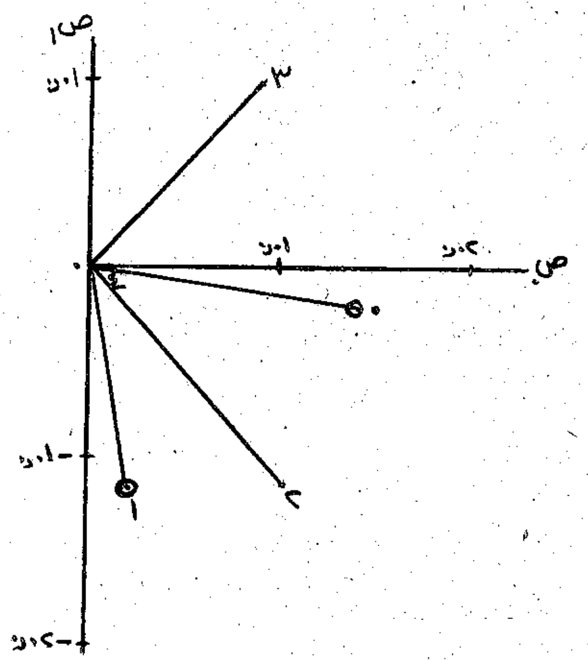
شكل (٥) المجموعة (٣٢١٠)



شكل (٦) المجموعة (٤٢١٠)



شكل (٧) المجموعة (٤٣١٠)



شكل (٨) المجموعة (٤٣٢١٠)

ومرة أخرى نجد أن ادخال المتغير ٤ لم يؤثر فى قوة علاقة المجموعة (٣١٠) فهو مازال دخيلا ومازال أدخال ٣ مفيدا للعلاقة بين ٠ ، ١ ٠

(٤) أخيرا اذا حاولنا ضم جميع المتغيرات فى علاقة واحدة فسوف يظل أثر الازدواج باقيا ، وبالتالى فلا فائدة من هذه المحاولة التى تعطى مصفوفة المعاملات الاتية :

$$\underline{\underline{\text{ج}}} = \begin{bmatrix} 0.140 & -0.020 & 0.104 & 0.090 & 0.002 \\ 0.020 & -0.150 & 0.113 & -0.095 & 0.005 \\ 0.104 & -0.113 & 0.145 & -0.005 & 0.005 \\ 0.090 & 0.095 & -0.005 & 0.139 & -0.002 \\ 0.002 & -0.005 & 0.005 & -0.002 & 0.003 \end{bmatrix}$$

ويبين شكل (٨) أن أضافة المتغير ٤ الى المجموعة (٣٢١٠) لم يؤثر فى الخريطة عما كانت عليه فى شكل (٥) ٠ فما زالت الحزمة متنافرة بينما شعاع ٤ لايكاد يظهر لشدة صغره ٠ أى أن الازدواج الموجود فى المجموعة (٣٢١٠) مازال قائما بينما المتغير ٤ دخيل ٠

نستنتج من التحليل السابق أن المتغيرات الخمسة المدروسة تجمع بينها علاقتان ، الاولى للمجموعة (٢١٠) والاخرى للمجموعة (٣١٠) ، ومن الممكن أسقاط المتغير ٤ من الصورة كلية دون أن نفقد أى شئ ٠

يبقى بعد ذلك تقدير معالم كل من الدالتين ٠ لذلك نستخدم قطر المصفوفة $\underline{\underline{\sqrt{}}}^{*}$ الخاصة بكل مجموعة (قبل تغيير الاشارة) ونحسب المعاملات بأخذ الجذر التربيعى لخارج القسمة ، نظرا لأن هذا الجذر هو فى الواقع الوسط الهندسى للمعاملين الخاصين بالشعاعين الرئيسيين ٠ فالمعامل الخاص بالمتغير رقم هـ هو

$\dfrac{\sqrt{}^{*}_{\text{٠ه}}}{\sqrt{}^{*}_{\text{٠٠}}}$ من الانحدار الاولى باعتبار $\text{ص}_{\text{٠}}$ متغير تابع

$\dfrac{\sqrt{}^{*}_{\text{هه}}}{\sqrt{}^{*}_{\text{ه٠}}}$ ، " " " " " " $\text{ص}_{\text{ه}}$ " "

وبأخذ متوسط هاتين القيمتين نحصل على معامل الانحدار القطرى :

$$\hat{ح}_{هـ} = \sqrt{\frac{ر^{*}_{٠هـ}}{ر^{*}_{٠٠}} \times \frac{ر^{*}_{هـهـ}}{ر^{*}_{هـ٠}}} = \sqrt{\frac{ر^{*}_{هـهـ}}{ر^{*}_{٠٠}}}$$ (والاشارة هى عكس اشارة $ر^{*}_{٠هـ}$)

ففى المجموعة (٢١٠) المعاملان هما

$$\hat{ح}_{١} = -\sqrt{\frac{٠ر٠٥٦٨٦}{٠ر٠٥٦٧٤}} = -١ر٠٠١ \quad ، \quad \hat{ح}_{٢} = \sqrt{\frac{٠ر٠٩٨٥٢}{٠ر٠٥٦٧٤}} = ١ر٣١٨$$

فالتقدير $\hat{ح}_{١}$ هو متوسط التقديرين : $\frac{-٠ر٠٥٥٣٥}{٠ر٠٥٦٧٤} = -٠ر٩٧٦$ ، $\frac{-٠ر٠٥٦٨٦}{٠ر٠٥٥٣٥} = -١ر٠٢٧$

وطبيعى أن نسبة الاول الى الانحدار القطرى (= ٠ر٩٧٥) كنسبة القطرى الى الثانى ٠

هذه النسبة هى فى الواقع معامل الارتباط الجزئى Partial Correlation Coefficient بين المتغيرين ص٠ ، صهـ ، أى معامل ارتباط بواقى انحدار هذين المتغيرين (وهما المتغير التابع والمتغير الذى ندرس معامله) على جميع المتغيرات الاخرى ، وهو

$$\frac{ر^{*}_{٠هـ}}{\sqrt{ر^{*}_{٠٠}\, ر^{*}_{هـهـ}}}$$

فحاصل ضرب هذا المعامل فى معامل الانحدار القطرى هو $\frac{ر^{*}_{٠هـ}}{ر^{*}_{٠٠}}$ ، وهو معامل الانحدار الاولى باعتبار ص٠ متغير تابع ٠ كما أن خارج قسمة المعامل القطرى على هذا المعامل هو $\frac{ر^{*}_{هـهـ}}{ر^{*}_{٠هـ}}$ وهو معامل الانحدار الاولى باعتبار صهـ متغير تابع ٠ وللتعبير عن هذين الحدين يستخدم فريش العلامة % للدلالة على الضرب والقسمة بحيث يكون الحدين هما :

معامل الانحدار القطرى % معامل الارتباط الجزئى ٠

فبالنسبة لمعامل ص١ يكون الحدان هما :

$$\hat{ح}_{١} = -١ر٠٠١ \ \% \ ٠ر٩٧٥$$

وبعبارة أخرى فانه كلما ارتفع معامل الارْتباط الجزئى كلما ضاقت الحزمة وبالتالى زادت معنوية التقدير ٠

تمرين (٢) : أدرس معامل $ص_٢$ فى المثال (١) ٠ وبيّن أثر أدخال $ص_١$ على العلاقة بين المتغيرين $ص_٠$ ، $ص_١$

تمرين (٣) : أدرس حزم انحدار $ص_٠$ على كل من $ص_٢$ ، $ص_٣$ ، $ص_٤$ فى المثال (٢)

تمرين (٤) : بفرض أن المتغير التابع نظريا هو $ص_١$ ، أدرس معامل انحدار هذا المتغير على $ص_٠$ ضمن المجموعات المكونة من المتغيرات الخمس ٠

٩ ـ انتقادات نظرية الانْحدار القطرى

تعتمد نظرية الانْحدار القطرى على تحليل حزم الانْحدارات الأولية ، وعلى الفكرة الأساسية التى تؤكد وقوع المعامل الحقيقى بين الحدود التى تحددها هذه الحزمة ، وهذا هو ما توصل اليه فريش عن طريق مناقشة الحالات القصوى لتركز الخطأ كله فى متغير دون الباقين ٠ وقد تمكن أحد تلاميذ فريش[1] من أثبات صحة هذا الاستنتاج وذلك باستخدام النظرية الاحْصائية استخداما دقيقا ، وبذلك أمكن تعزيز النظرية واعطائها سند نظرى قوى ٠

على أننا يجب أن نذكر أن نظرية فريش عالجت أمرين :

(١) الأول هو مشكلة الازْدواج الخطى ، وقد عالجها عن طريق تحليل خرائط حزم الانْحدار ٠

(٢) الثانى هو مشكلة تقدير معالم العلاقات الاقْتصادية اذا كانت المتغيرات محتوية على أخطاء مشاهدة بينما المعادلة نفسها خالية من الخطأ ٠

وبالرغم من أن فريش عالج مشكلة الازْدواج بعدة وسائل الا أن أهمها تحليل خرائط حزم الانحدار ٠

---

(1) Tjalling Koopmans: Linear Regression Analysis of Economic Time Series - 1937.

ويكتفى بعض الكتاب [1] بتطبيق هذه الطريقة للتأكد من انتفاء الازدواج الخطى مفضلين اياها على النظريات الحديثة الاكثر دقة ولكنها فى نفس الوقت أكثر تعقيدا فاذا ثبت أن الازدواج غير موجود استخدموا طريقة المربعات الصغرى باختيار متغير مناسب كمتغير تابع ، خاصة وأن هذه الطريقة الأخيرة تكفل شيئين :

(١) أنها تقع ضمن الحزمة التى يقع فيها التقدير الحقيقى لمعاملات الانحدار .

(٢) أنها تعطى اختبارات للمعنوية ، وبالتالى تمكن من حساب حدود للثقة

ولعل السبب الاساسى هو أن صحة نتائج نظرية فريش محدودة بافتراض أن البيانات المدروسة تشمل المجتمع ، وهذا الفرض راجع الى أن فريش لم يطبق نظرية العينات فى استخلاص التقديرات . ولذلك فلو حاولنا تصحيح هذا الفرض ، بأن نعتبر الاخطاء عينة من مجتمع يضم جميع الاخطاء فى نفس المتغير فسوف يترتب على ذلك أن كل واحد من الانحدارات الاولية يكون فى ذاته تقديرا معرضا لاخطاء العينات بالصورة التى تأخذ بها طريقة المربعات الصغرى التى تحسب بها تلك الانحدارات . وعلى ذلك فان الانحدارات الاولية الاساسية لا تعين فى ذاتها الحدود القصوى لتقديرات المعامل الحقيقى لانها فى ذاتها تقع ضمن حدود ثقة قد تفوق فى مداها المدى الذى تحدده تلك الانحدارات .

ولتوضيح ذلك نفرض أننا طبقنا المربعات الصغرى على المجموعة (٢١٠) بأخذ انحدار ص على الباقين ، ونفرض أن درجات الحرية كانت ٥٠ حتى نضمن أن يكون الخطأ المعيارى صغيرا . فى هذه الحالة نجد أن معامل ص هو ـ٩٧٥٦ر٠ (كما حسبناه من قبل) بينما الخطأ المعيارى هو ٣١٩٠ر٠ وبأخذ حدود الثقة عند مستوى ٩٥ ٪ نجد أن المعامل الحقيقى يقع بين ـ٩٧٥٦ر٠ ± ٦٣٨٠ر٠ = ـ ٣٩٤٠ر١ ، ـ ٩١١٨ر٠ اذا فرض وكانت شروط المربعات الصغرى متحققة . ولو أننا قبلنا الحدود التى اقترحها فريش لكان المعامل واقعا بين ـ ٠٢٧ر١ ، ـ ٩٧٦ر٠ أى أن الحدود التى تعينها هذه النظرية أقل من الحدود التى يمكن أن تحسب لو أخذنا فى الاعتبار أن التقديرات محسوبة من عينة .

---

(1) Richard Stone: Measurement of Consumers' Expenditure and Behairour in the U. K., 1920-1938.

ولعل هذه الحقيقة هى أهم الانتقادات التى توجه الى نظرية الانحدار القطرى خاصة وأن أخذ المتوسط لا يعنى بالضرورة نحصل على تقدير أفضل الا اذا كانت الاخطاء موزعة بالتساوى .

ومع ذلك فانه بالرغم من تحبيذ بعض الكتاب[1] لفكرة اختبار الازدواج الخطى عن طريق تحليل حزم الانحدار الا أن هذا الاختبار يشوبه عيبان :

(١) أولا أنه غير مبنى على نظرية العينات مما لا يتيح للباحث أن يعتمد على تقديرات موضوعية مثل تلك التى وجدناها بالنسبة للمربعات الصغرى .

(٢) ثانيا أن هذا الاختبار — وكذلك الانحدار القطرى — مبنى على افتراض لا يلزم أن يتحقق بالضرورة ، وهو أن الاخطاء مستقلة عن بعضها البعض ولو انهار هذا الفرض لامكن أن تكون الحزمة الحقيقية أضيق أو أوسع من تلك المحسوبة من الانحدارات الاولية ، وفقا لوجود ارتباط طردى أو عكسى بينهما .

كذلك فان صحة النظرية تتوقف على صحة افتراض أن المعادلة تتحقق بدون خطأ ، وكما هو معلوم فان هذا فرض يندر أن يتحقق فى الدراسات الاقتصادية العملية . والواقع أن انتفاء أخطاء المشاهدات يمكن تصوره ولكن لا يمكن أن نتوقع اختفاء أخطاء المعادلات .

هناك ملحوظة أخيرة يجب أن نذكرها عندما نضطر الى استخدام تحليل حزم الانحدار لكشف الازدواج الخطى . لنفرض أن أدخال متغير معين أدى الى أظهار الازدواج ، فى هذه الحالة نضطر الى استبعاده من المعادلة ليس لانه لا ينتمى اليها وبالتالى نستنتج أن النظرية التى أدخلته خاطئة بل لان البيانات المتاحة لا تسمح بالتوصل الى تقديرات أحصائية سليمة . فازدواج معادلتى الطلب والعرض لا يعنى أن السعر أو الكمية لا ينتميان للمعادلة ، وانما معناه أنه لا يمكن أن نتوصل الى تقدير سليم للمعادلتين بالوسائل العادية ، وعلينا اذن أن نبحث عن طرق أخرى .

---

(1) Stone, op. cit. Also, J. Tinbergen : Econometrics PP. 80-82

ثانيا ــ طريقة المتغيرات المساعدة

١٠ ــ نظريــة رايرسول

تعتبر نظرية فريش حجر الاساس الذى مهد لعدد من النظريات التى تعالج أخطاء المشاهدة فى الدراسات الاقتصادية ٠ ومما يجب ذكره أن معالجة هذه الحالة لم تكن الاولى من نوعها اذ سبق أن عالج كثير من الكتاب الاحصائيين (مثل بير سون وهوتلنج) نماذج مماثلة ولكن فى نواحى تطبيقية أخرى ٠ غير أن الدراسة التى قام بها فريش كانت الاولى من نوعها فى الميدان الاقتصادى ٠ وترتب على شعوره بالحاجة الى المزيد من البحث فى هذا الاتجاه أن حدث أمران

(١) الاول هو ظهور أول جمعية للاقتصاد القياسى وهى المعروفة بأسم Econometric Society ٠ وقد تزعمها فريش رغم أنها اتخذت مقرا لها فى أمريكا ٠

(٢) الثانى هو توجيه فريش لعدد من تلاميذه الباحثين فى الدراسات العليا الى التعمق فى هذا الاتجاه ٠ وكان أهم هؤلاء ثلاثة :

أ ــ كوبمانز Koopmans الذى أعد رسالته للدكتوراه عن الانحدار الخطى بين السلاسل الزمنية الاقتصادية ونجح فى أثبات كثير من نتائج فريش مستخدما نظرية التقدير الاحصائى التى كان الاحصائى الانجليزى الشهير فيشر قد أرسى معالمها ٠ ثم ساهم فى صقل النظرية المعروفة باسم الانحدار المرجح ٠ وهى التى سنعالجها فيما بعد ٠

ب ــ رايرسول : Reirsøl وقد استمر فى نفس الاتجاه وبنفس الاسلوب الذى بدأ به فريش ٠ وكان أهم الاساليب التى ابتكرها [1] هو الاسلوب الذى أصبح معروفا باسم المتغيرات المساعدة ٠ وهذا ما سنعالجه هنا ٠

حـ ــ هوفلمو : Haavelmo ٠ وقد اتجه وجهة جديدة ساعيا فى نفس الوقت الى تطبيق النظرية الاحصائية السليمة على تحليله ٠ فقد أعاد صياغة المشكلة بما أبرز

---

1) O. Reirsøl : Confluence Analysis by means of Instrumental Sets of Variables- Stockholm, 1945

O. Reirsøl : " Confluence analysis by means of lag moments and other methods of Confluence analysis"- Econometrica, 1941.

أهمية الأخطاء العشوائية التى تصيب المتغيرات الداخلة فى علاقة معينة ، ليس نتيجة لأخطاء المشاهدة ، وانما بسبب وجود علاقات آنية بين المتغيرات . وسوف نتناول هذا الأسلوب فى الجزء الثالث من هذه المذكرات

ولنعد الى نظرية رايرسول ، فنجده يشير الى أن المتغيرات التى يتناولها البحث تنقسم الى مجموعتين : الأولى هى المتغيرات المدروسة Investigational Variables وهى المتغيرات التى تظهر فى المعادلة التى نريد دراستها . والثانية هى المتغيرات المساعدة Instrumental Variables ، ويختارها الباحث وفقا لقواعد معينة بحيث تكفل له التوصل الى التقديرات السليمة المطلوبة . ولتبين هذه القواعد نراجع السبب فى عدم تمكننا من حل مجموعة المعادلات الأساسية (١٤) التى كان يراد منها التوصل الى التقديرات المطلوبة ، فنلاحظ أنه عند ضرب المعادلة المدروسة فى كل من المتغيرات المدروسة ثم حساب العزوم وأخذ التوقعات ، لم يختف الطرف الأيسر من تلك المعادلات بسبب ارتباط المتغيرات المدروسة بالخطأ (المركب) الموجود فى المعادلة . اذن نتوقع أننا لو استخدمنا متغيرات أخرى بديلة مستقلة عن هذه الأخطاء لأمكننا أن نتخلص من الطرف الأيسر لأن توقعه يساوى الصفر .

غير أن هذا فى ذاته لا يكفى . فالأساس فى التقدير هو أنه لو كانت لدينا معلومات عن المتغيرات الحقيقية (أى بدون خطأ) لأمكن حساب عزومها $\tilde{\text{م}}_{\text{رهـ}} = \text{مج}\ \tilde{\text{ض}}_{\text{رو}}\ \tilde{\text{ض}}_{\text{هـو}}$ ، وبذلك تصبح المجموعة (١٤) هى

$$\sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}-1} \text{أ}_{\text{ر}}\ \tilde{\text{م}}_{\text{رهـ}} = \text{صفر} \qquad (\text{هـ} = ٠ ، ١ ، \ldots ، \text{م}-١)$$

وهى م من المعادلات المتجانسة فى م من المجاهيل يمكن حلها معا اذا توفر الشرط الأساسى الذى نبدأ منه وهو أن الأجزاء الحقيقية $\tilde{\text{ض}}_{\text{رو}}$ تحقق علاقة خطية تامة . ولذلك فمهمتنا مزدوجة وهى : اختيار المتغيرات المساعدة بحيث

(١) تكون مستقلة عن الأخطاء فى جميع المتغيرات المدروسة .

(٢) كل منها وثيق الصلة بالجزء الحقيقى من واحد من المتغيرات المدروسة ٠
وبهذا تصبح لدينا معلومات تكفى لأغراض التقدير ٠

اذن لو استطعنا التوصل الى م من هذه المتغيرات ولنسميها $\text{غ}_{\text{هـ}}$ (تمشيا مع اصطلاحنا على الرمز الى المتغيرات المشاهدة بدون خطأ بالرموز ع) ثم عرفنا العزم بين متغير مدروس وآخر مساعد بالرمز ل (بدلا من م)

$$\text{ل}_{\text{ر هـ}} = \text{مجـ}_{\text{و}}\ \text{ض}_{\text{ر و}}\ \text{غ}_{\text{هـ و}} \qquad (٢٥)$$

فان بضرب المعادلة المدروسة وهى

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=٠}^{\text{م}-١}\ \text{أ}_{\text{ر}}\ \text{ض}_{\text{ر و}} = \text{ط}_{\text{و}}$$

فى كل من هذه المتغيرات المساعدة والجمع بالنسبة الى و ، نجد أن الطرف الأيمن هو

$$\text{مجـ}_{\text{و}} \left(\text{مجـ}_{\text{ر}=٠}^{\text{م}-١}\ \text{أ}_{\text{ر}}\ \text{ض}_{\text{ر و}} \right) \times \text{غ}_{\text{هـ و}} = \text{مجـ}_{\text{ر}=٠}^{\text{م}-١}\ \text{أ}_{\text{ر}} \left(\text{مجـ}_{\text{و}}\ \text{ض}_{\text{ر و}}\ \text{غ}_{\text{هـ و}} \right)$$

$$= \text{مجـ}_{\text{ر}=٠}^{\text{م}-١}\ \text{أ}_{\text{ر}}\ \text{ل}_{\text{ر هـ}} \qquad (\text{هـ} = ٠ ، ١ ، ٠٠٠ ، \text{م} - ١)$$

أما الطرف الأيسر : $\text{مجـ}_{\text{و}}\ \text{ط}_{\text{و}}\ \text{غ}_{\text{هـ و}}$ فتوقعه يساوى الصفر فرضا ٠ وبذلك تصبح لدينا مجموعة معادلات جديدة هى :

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=٠}^{\text{م}-١}\ \text{أ}_{\text{ر}}\ \text{ل}_{\text{ر هـ}} = \text{صفر} \qquad (\text{هـ} = ٠ ، ١ ، ٠٠٠ ، \text{م} - ١) \qquad (٢٦)$$

ومعلوم أن حل مجموعة من المعادلات المتجانسة يعطى نسبا للمجاهيل ، لأن المعادلة المتجانسة يمكن ضربها فى أى مقدار ثابت وتظل تساوى الصفر ٠ ولذلك يمكننا أن نحدد قيمة أحد المعاملات وفقا للارادة وبذلك يمكن الحل فى باقى المعاملات المجهولة ٠ وسوف نعتبر أن $\text{أ}_٠ = -١$ وبذلك تتحول المعاملات $\text{أ}_{\text{ر}}$ الى المعاملات $\text{ب}_{\text{ر}}$ المعرفة فى المعادلة (٥) التى بها $\text{ص}_٠$ بمعامل = ١ فى الطرف الأيمن وباقى المتغيرات فى الطرف الأيسر ٠

ومعنى هذا أن تتحول المعادلات المتجانسة الى معادلات غير متجانسة

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{م}-١}\ \text{ب}_{\text{ر}}\ \text{ل}_{\text{ر هـ}} = \text{ل}_{٠\text{هـ}} \qquad (\text{هـ} = ٠ ، ١ ، ٠٠٠ ، \text{م} - ١) \qquad (٢٦)$$

أو ، باستخدام المصفوفات واعتبار أن المصفوفة $\underline{\underline{\text{ل}}}_{\text{صع}}$ هى المصفوفة من الدرجة (م−١) × م التى تمثل عزوم المتغيرات المدروسة عدا الأول ($\text{ص}_{\text{٠}}$) مع جميع المتغيرات المساعدة ، بينما الموجه $\underline{\text{ل}}_{\text{٠ع}}$ هو السطر الذى يضم عزوم $\text{ص}_{\text{٠}}$ مع جميع المتغيرات المساعدة ، فان

$$\hat{\text{ب}}\ \underline{\underline{\text{ل}}}_{\text{صع}} = \underline{\text{ل}}_{\text{٠ع}}$$

وهنا تثور مشكلة جديدة هى أن المصفوفة $\underline{\underline{\text{ل}}}_{\text{صع}}$ ليست مربعة ولذلك لا يمكن ايجاد مقلوبها لحل المعادلات السابقة فى $\hat{\text{ب}}$ • ولن يتحقق هذا الحل الا لو كانت المصفوفة من الدرجة م × م التى تضم كل العزوم صفرية المحدد ، وهو أمر لا يوجد ما يضمن تحققه عمليا •

ولذلك يقترح رايرسول أن نحسب الحل م من المرات ، فى كل مرة نحذف واحدا من المتغيرات المساعدة (رقم هـ مثلا) ، لأن مصفوفة العزوم فى هذه الحالة — ولنرمز لها بالرمز $\underline{\underline{\text{ل}}}^{(\text{هـ})}_{\text{صع}}$ — سوف تكون مربعة • واذا رمزنا الى الحل بالرمز $\hat{\text{ب}}_{\text{هـ}}$ فانه يكون لدينا م حلول •

$$\hat{\text{ب}}_{\text{هـ}} = \underline{\text{ل}}^{(\text{هـ})}_{\text{٠ع}}\ \underline{\underline{\text{ل}}}^{(\text{هـ})-1}_{\text{صع}} \qquad (\text{هـ} = \text{٠ ، ١ ، ... ، م−١})$$

وبذلك ينشأ موقف جديد يماثل الموقف الذى واجهه فريش عند دراسة الانحدارات الأولية • وقد تمكن رايرسول من اثبات أن المعاملات الحقيقية تقع ضمن الحدود التى تعينها التقديرات المحسوبة بهذه الطريقة ، تماما كما أثبت فريش أن المعاملات الحقيقية تقع ضمن الحدود التى تعينها حزمة الانحدار لو كانت هذه الحزمة محسوبة من بيانات المجتمع • ومع ذلك فان التقدير النهائى لا يزال غير محدد • ولذلك فان الكتاب الذين يحبذون استخدام هذه النظرية يلجئون مباشرة الى استخدام (م −١) من المتغيرات المساعدة (أى مجرد العدد الكافى) بحيث تكون وثيقة الصلة بالمتغيرات المتبوعة حتى يمكن أن يكون الحل أقرب مايكون الى المطلوب •

غير أن هذا الأسلوب يعيبه عدم التمكن من اكتشاف الازدواج الخطى ان وجد[1] ، وان كان من المنتظر أن يؤدى حساب حزمة الانحدار باستخدام المتغيرات المساعدة الى بيان هذه

---

(١) أنظر قسم (١٥) فيما بعد حيث نضع قاعدة لاختبار الازدواج الخطى فى مثل هذه الحالة

الظاهرة لو وفق الباحث فى اختيار المتغيرات المساعدة المناسبة • وهذا يثير مشكلة اختيار هذه الأخيرة • وهو ما يثير كثيرا من التساؤلات • نظرا لأنه من العسير توفر العدد الكافى من البيانات الاضافية الذى يحقق الشروط المطلوبة •

وقد اقترح راير سول أن نستخدم نفس المتغيرات المدروسة ولكن بفترة أبطاء كمتغيرات مساعدة • فمثلا نستخدم دخل السنة السابقة كمتغير مساعد يعبر عن الجزء الحقيقى من الدخل الحالى وهكذا • وواضح أن هذا الأسلوب يفترض عدة افتراضات هى :

(١) أن البيانات المدروسة تأخذ شكل سلسلات زمنية • فاذا كانت البيانات غير زمنية استحال استخدام هذا الأسلوب • ويلاحظ أن الصعوبة تزداد فى هذه الحالة لأنه عند ما نقوم ببحث على مجموعة من المفردات فى وقت واحد فان البحث يتركز عادة على المتغيرات المدروسة وقلما تجمع بيانات أضافية لنفس المفردات لمجرد أغراض التقدير بهذا الأسلوب • وبذلك يستحيل الحصول على متغيرات مساعدة أطلاقا •

(٢) أن الأخطاء فى متغير غير مرتبطة زمنيا بحيث يمكن اعتبار أن القيمة فى الفترة السابقة المكونة من جزء حقيقى وخطأ غير مرتبطة بالخطأ الجارى ولكن من المعلوم أن هذا الاستقلال بين الأخطاء كثيرا مالا يتحقق • فنحن كثيرا ما نعتمد على تقديرات عن نقط زمنية معينة (كالتعدادات) ثم تستكمل البيانات فيما بينها مما يجعل الخطأ فى تعداد معين يستمر عدة سنوات قبل أن يصحح ومن هنا ينشأ ارتباط بين الأخطاء المتتالية •

(٣) كذلك يفترض هذا الأسلوب أن الجزء الحقيقى لأى متغير يتبع مجرى زمنى ممهد بحيث يكون الارتباط بين القيم المتتالية كبيرا وهذا ان صح فى كثير من المتغيرات الاقتصادية الا أنه ليس قاعدة عامة • وقد يضعف هذا الارتباط اذا كانت المتغيرات متأثرة بتقلبات دورية عنيفة دون أن يدل ذلك على كبر الخطأ فيها بالضرورة •

مثال (٣) : فى دراسة للطلب على سلعة معينة يراد تقدير معالم دالة الطلب

$$ص_{\circ} = ب_{١} ص_{١} + ب_{٢} ص_{٢} + ب_{٣} + ق$$

حيث : $ص_{٠}$ = الكمية المطلوبة بالكيلو جرام

$ص_{١}$ = السعر بالقرش للوحدة للمستهلك

$ص_{٢}$ = دخل الفرد بالجنيه (بأسعار ثابتة)

ووجد أن عزوم هذه المتغيرات هي

	$ص_{٠}$	$ص_{١}$	$ص_{٢}$
$ص_{٠}$	٣٢ ٤٠٠		
$ص_{١}$	−٢ ٧٣٦	١٥ ٦٢٥	
$ص_{٢}$	٤ ٤٤٥	٣ ٠٨٢	١ ٤٠٦

غير أنه لما كانت المتغيرات محتوية على أخطاء مشاهدة ، فقد رؤى الاستعانة بمتغيرات مساعدة هي

$ع_{١}$ = سعر الجملة لنفس السلعة

$ع_{٢}$ = الضرائب المباشرة (للفرد)

فكانت العزوم المشتركة هي

	$ص_{٠}$	$ص_{١}$	$ص_{٢}$
$ع_{١}$	−٢٣٨٠	١٢٥٠٠	٢٦٨٠
$ع_{٢}$	٧٢١٠	٥٠٠٠	٢٢٥٥

لحساب التقديرات بالاستعانة بهذه المتغيرات نجد أن معادلات التقدير هي (بعد قسمة جميع العزوم على ١٠ ٠٠٠)

$$١ر٢٥٠٠ \; \hat{ب}_{١} + ٠ر٢٦٨٠ \; \hat{ب}_{٢} = -٠ر٢٣٨٠$$

$$٠ر٥٠٠٠ \; \hat{ب}_{١} + ٠ر٢٢٥٥ \; \hat{ب}_{٢} = ٠ر٧٢١٠$$

ويمكن حل هاتين المعادلتين معا (مثلا بطريقة المحددات) للحصول على قيمتي التقديرين

والجدول التالى يبين الحل باستخدام جدول مماثل لذلك الذى استخدمناه فى حساب تقديرات المربعات الصغرى[1] ٠ مع ملاحظة أننا لا نحتاج هنا الى ايجاد المقلوب ٠ وأن مصفوفة العزوم المستخدمة غير متماثلة ٠

جدول حساب التقديرات

	ص١	ص٢	ص٠	المجمـوع	المراجعـة
القسم الأول :					
أ/١	١ر٢٥٠٠	٠ر٢٦٨٠	ـ٠ر٢٣٨٠	١ر٢٨٠٠	
أ/٢	٠ر٥٠٠٠	٠ر٢٢٥٥	٠ر٧٢١٠	١ر٤٤٦٥	
ب/١	١ر٠٠٠٠	٠ر٢١٤٤	ـ٠ر١٩٠٤	١ر٠٢٤٠	١ر٠٢٤٠
ب/٢	٠ر٥٠٠٠	٠ر١٠٧٢	ـ٠ر٠٩٥٢	٠ر٥١٢٠	٠ر٥١٢٠
القسم الثاني :					
أ/٢		٠ر١١٨٣	ر٨١٦٢	٠ر٩٣٤٥	٠ر٩٣٤٥
ب/٢		١ر٠٠٠٠	٦ر٨٩٩٤	٧ر٨٩٩٤	٧ر٨٩٩٤
الجزء العكسي					
الأول ـ د/١		٠ر٢١٤٤	١ر٤٧٩٢	١ر٦٩٣٦	١ر٦٩٣٦
حـ/١	١ر٠٠٠٠	ـ	ـ١ر٦٦٩٦	ـ٠ر٦٦٩٦	ـ٠ر٦٦٩٦

فى القسم الأول ٠ السطور أ تلخص المعادلات السابقة ٠ بوضع مصفوفة العزوم المشتركـــة مع جعل العزوم ص٠ فى الجانب الأيسر ٠ أما الجزء ب فأول سطر فيه ب/١ هو السطـــر

(١) المذكرة ٧١٧ قسم (أ) صفحة ٥٠ ٠

الأول أ/١ مقسوما على أول عدد فيه ، والسطر الثانى ب/٢ هو ب/١ مضروبا فى أول عدد فى أ/٢ . وتتم المراجعة بأجراء نفس العمليات على المجاميع .

وفى القسم الثانى نبدأ فى الجزء أ بالسطر الثانى أ/٢ وهو باقى طرح ب/٢ من أ/٢ فى القسم الأول . ويكون ب/٢ هو خارج قسمة أ/٢ على أول عدد فيه ، وهذا يعطى تحت العمود $ص_{٠}$ قيمة معامل $ص_{٢}$. أى أن $\hat{ب}_{٢}$ = ٦٫٨٩٩٤

وبالحصول على أول النتائج ننتقل الى الجزء العكسى من الحل . ويبدأ بضرب آخر سطر من الجزء السابق فى معامل $ص_{٢}$ فى الجزء ب من القسم الأول . أى أن د/١ هو ب/٢ مضروبا فى ٢١٤٤٫٠ ومنه نستنتج ح/١ بالطرح من ب/١ بالقسم الأول . فنجد أن معامل $ص_{١}$ أى $\hat{ب}_{١}$ = ــ ١٫٦٦٩٦

وتكون المعادلة المقدرة بطريقة المتغيرات المساعدة هى

$$ص_{٠} = -١٫٦٦٩٦\, ص_{١} + ٦٫٨٩٩٤\, ص_{٢} + \hat{ب}_{٣} + ق$$

ولو أننا طبقنا المربعات الصغرى باعتبار $ص_{٠}$ متغير تابع لوجدنا أن المعادلة هى

$$ص_{٠} = -١٫٤٠٧\, ص_{١} + ٦٫٢٤٤\, ص_{٢} + \hat{ب}_{٣} + ق$$

ورغم تماثل الاشارات فان تقديرات المربعات الصغرى تختلف عن التقديرات التى تأخذ أثر أخطاء المشاهدة فى الحسبان بما يتراوح بين ١٠٪ ، ١٥٪ . ومع ذلك فان هذه المقارنة لاتعنى شيئا لأن المقارنة السليمة يجب أن تبنى على أساس أخذ الأخطاء المعيارية فى الحسبان . ومع ذلك فان تقارب التقديرات أو تباعدها يتوقف على مدى الخطأ فى المشاهدات .

<u>تمرين (٥)</u> : استخدم البيانات المعطاه فى المثال السابق لمناقشة حزمة الانحدار ثم احسب الانحدار القطرى . قارن النتائج بتلك التى حصلنا عليها باستخدام المتغيرات المساعدة .
(<u>ارشادات</u> : الانحرافات المعيارية هى $\sigma_{٠}$ = ١٨٠ ، $\sigma_{١}$ = ١٢٥ ، $\sigma_{٢}$ = ٣٧٫٥ .
ومنها تحسب مصفوفة الارتباط ثم المصفوفة المرافقة ، فالانحدارات الأولية ثم تضرب فى $\sigma_{٠} / \sigma_{ر}$ (ر = ١ ، ٢) للتوصل الى المعاملات بالوحدات الأصلية وهى على

التوالى : $\hat{\text{ب}}_1$ = ٤٠٦٨ر١ ، ـ ٤٧٠٦ر١ ، ـ٤٣٨٣ر١ ؛ $\hat{\text{ب}}_2$ = ٢٤٤٢ر٦ ، ٣٨٣٨ر٦ ، ٤٠٣٥ر٦ . ويكون الانحدار القطرى هو ـ٤٣٦٧ر١ ، ٣٢٣٣ر٦ . لاحظ أن الانحدارات الأولية متقاربة ، ومع ذلك فقد وقعت التقديرات بطريقة المتغيرات المساعدة خارجها)

وكما يتضح من هذا التمرين فان التقدير الفعلى لا يلزم أن يكون داخل حدود الحزمة المحسوبة من الانحدارات الاولية كما افترض فريش . والواقع أن هناك حقيقة لم تظهر بجلاء فى صياغة نظرية المتغيرات المساعدة وهى <u>أننا لم نفترض أن أخطاء المشاهدة مستقلة عن بعضها البعض بالضرورة</u> . وسوف يتضح هذا بجلاء فى القسم (١٥) من هذه المذكرة .

١١ ـ حالة وجود متغيرات خالية من الخطأ

افترضنا حتى الآن أن المتغيرات المدروسة كلها متغيرات تحتوى على خطأ . غير أنه من الجائز أن يكون هذا الفرض غير متحقق ، ولذلك سوف نستخدم القواعد التالية فى الترميز : المتغيرات المشاهدة بخطأ هى ص كما سبق
أما المتغيرات الخالية من الخطأ فهى ع وتشمل : المتغيرات ع* الداخلة فى المعادلة المدروسة ، المتغيرات ع** التى تضاف كمتغيرات مساعدة .

فى هذه الحالة لن يتغير الأسلوب عما سبق . ففى حزم الانحدار نحسب الانحدارات الأولية مكتفين بالسطور الخاصة بالمتغيرات ص فقط (أى نهمل السطور الخاصة بالمتغيرات ع*) . أما فى طريقة المتغيرات المساعدة فاننا نعتبر أن المتغيرات المساعدة تضم بالضرورة المتغيرات ع* الداخلة فى المعادلة . ثم نجرى الحل كما سبق . فاذا فرض أن ص٠ كانت دالة فى المتغيرات ص ، ع* :

$$\underline{\text{ص}}_0 = \underline{\text{ح}}\,\underline{\text{ع}}^* + \underline{\text{ب}}\,\underline{\underline{\text{ص}}} + \underline{\text{ق}}$$

ورمزنا الى المتغيرات الداخلة فى الطرف الأيسر بالرمز $\underline{\underline{\text{س}}}$

$$\underline{\underline{\text{س}}} = \begin{bmatrix} \underline{\text{ع}}^* \\ \underline{\underline{\text{ص}}} \end{bmatrix}$$

فان المتغيرات المساعدة تتكون من $\underline{\underline{\text{ع}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\text{ع}}}^{*} \\ \underline{\underline{\text{ع}}}^{**} \end{bmatrix}$

$$\therefore \; \underline{\text{ص}}_{\circ} = \left(\underline{\text{حـ}} \quad \underline{\text{ب}} \right) \begin{bmatrix} \underline{\underline{\text{ع}}}^{*} \\ \underline{\underline{\text{ص}}} \end{bmatrix} + \underline{\text{ق}} = \left(\underline{\text{حـ}} \quad \underline{\text{ب}} \right) \cdot \underline{\underline{\text{س}}} + \underline{\text{ق}}$$

وبالضرب من اليسار فى $\underline{\underline{\text{ع}}}'$ فاننا نحصل على مصفوفات العزوم :

$$\underline{\text{م}}_{\circ\text{ع}} = \underline{\text{ص}}_{\circ} \underline{\underline{\text{ع}}}' = \left(\underline{\text{م}}_{\circ\text{ع}^{*}} \quad \underline{\text{م}}_{\circ\text{ع}^{**}} \right)$$

$$\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{س ع}} = \underline{\underline{\text{س}}}\, \underline{\underline{\text{ع}}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ع}^{*}\text{ع}} \\ \underline{\underline{\text{ل}}}_{\text{ص ع}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ع}^{*}\text{ع}^{*}} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ع}^{*}\text{ع}^{**}} \\ \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ص ع}^{*}} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ص ع}^{**}} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; \underline{\text{م}}_{\circ\text{ع}} = \left(\underline{\hat{\text{حـ}}} \quad \underline{\hat{\text{ب}}} \right) \cdot \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{س ع}}$$

ومنهـا :

$$\left(\underline{\hat{\text{حـ}}} \quad \underline{\hat{\text{ب}}} \right) = \underline{\text{م}}_{\circ\text{ع}}\; \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{س ع}}^{-1}$$

<u>مثال (٤)</u> : بافتراض أن الاستهلاك دالة فى الدخل موزعا بين الأجور والأرباح ، وفى سعر الفائدة . أوجد تقديرات معالم دالة الاستهلاك ، مع ملاحظة أن كلا من الاستهلاك والأجور يحتويات على خطأ بينما الأرباح وسعر الفائدة خاليين من الخطأ . استخدم الصادرات كمتغير مساعد .

الخطوة الأولى هى حساب العزوم (حول الوسط الحسابى) ، مع استخدام الرموز :

$\text{ص}_{\circ}$ = الاستهلاك ، ص_{1} = الأجور ، ع_{1} = الأرباح ، ع_{2} = سعر الفائدة

ع_{3} = الصادرات .

	ص$_٠$	ص$_١$	ع$_١$	ع$_٢$
ص$_٠$	١٠٠٢١٨٨			
ص$_١$	٩٥٨١٥٨	٩٥٠١٣٢		
ع$_١$	٣٥٤٥٧٥	٢٨٢ ٢٩٥	٣٧٤ ٦٤٠	
ع$_٢$	ـ٩٩٩٨٣٨	ـ١ ٠١٠ ٩٣٣	ـ٥٥ ٣٠٠	١ ٧٠٣ ٥٩٥
ع$_٣$	١٤٦٢٨٩١	١ ٣٦٣ ٧١٩	٧٦٨ ٩٥٥	ـ١ ١٧٩ ٩٠٣

باستخدام هذه العزوم تكون المعادلات الواجب حلها للحصول على التقديرات هى تلك المكونة بأخذ العزوم مع ع$_١$ ثم ع$_٢$ ثم ع$_٣$ على التوالى ، وسوف نقسم جميع العزوم على ١٠^٦ لجعلها قريبة من الواحد الصحيح :

$$0.3744\,\hat{\text{ح}}_1 - 0.0553\,\hat{\text{ح}}_2 + 0.2823\,\hat{\text{ب}}_1 = 0.3546$$

$$-0.0553\,\hat{\text{ح}}_1 + 1.7036\,\hat{\text{ح}}_2 - 1.0109\,\hat{\text{ب}}_1 = -.9998$$

$$0.7690\,\hat{\text{ح}}_1 - 1.1799\,\hat{\text{ح}}_2 + 1.3637\,\hat{\text{ب}}_1 = 1.4629$$

ويمكن الحصول على الحل بنفس الطريقة الحسابية السابق استخدامها ، بتلخيص العـــزوم فى الجزء الأول من الحل ثم حذف المعادلة الأولى واعادة الحساب لحذف الثانية فنحصل فـى القسم الثالث على قيمة المعامل الخاص بالمتغير ص$_١$ أى $\hat{\text{ب}}_1$. ويبدأ الحل العكسـى لايجاد $\hat{\text{ح}}_2$ ثم $\hat{\text{ح}}_1$. كما هو موضح بالجدول التالى

جدول حساب التقديرات

	ع١	ع٢	ص١	ص٠	المجموع	المراجعة
الأول ـ أ/١	٠ر٣٧٤٦	ـ٠ر٠٥٥٣	٠ر٢٨٢٣	٠ر٣٥٤٦	٠ر٩٥٦٢	
أ/٢	ـ٠ر٠٥٥٣	١ر٧٠٣٦	ـ١ر٠١٠٩	ـ٠ر٩٩٩٨	ـ٠ر٣٦٢٤	
أ/٣	٠ر٧٦٩٠	ـ١ر١٧٩٩	١ر٣٦٣٧	١ر٤٦٢٩	٢ر٤١٥٧	
ب/١	١ر٠٠٠٠	ـ٠ر١٤٧٦	٠ر٧٥٣٦	٠ر٩٤٦٦	٢ر٥٥٢٦	٢ر٥٥٢٦
ب/٢	ـ٠ر٠٥٥٣	٠ر٠٠٨٢	ـ٠ر٠٤١٧	ـ٠ر٠٥٢٢	ـ٠ر١٤١٠	ـ٠ر١٤١١
ب/٣	٠ر٧٦٩٠	ـ٠ر١١٣٥	٠ر٥٧٩٥	٠ر٧٢٧٩	١ر٩٦٢٩	١ر٩٦٢٩
الثاني ـ أ/٢		١ر٦٩٥٤	ـ٠ر٩٦٩٢	ـ٠ر٩٤٧٦	ـ٠ر٢٢١٤	ـ٠ر٢٢١٤
أ/٣		ـ١ر٠٦٦٤	٠ر٧٨٤٢	٠ر٧٣٥٠	٠ر٤٥٢٨	٠ر٤٥٢٨
ب/٢		١ر٠٠٠٠	ـ٠ر٥٧١٧	ـ٠ر٥٥٨٩	ـ٠ر١٣٠٦	ـ٠ر١٣٠٦
ب/٣		ـ١ر٠٦٦٤	٠ر٦٠٩٦	٠ر٥٩٦٠	٠ر١٣٩٢	٠ر١٣٩٣
الثالث ـ أ/٣			٠ر١٧٤٦	٠ر١٣٩٠	٠ر٣١٣٦	٠ر٣١٣٦
ب/٣ =ح/٣			١ر٠٠٠٠	ر٧٩٦١	١ر٧٩٦١	١ر٧٩٦١
الجزء العكسي الثاني ـ د/٣ = د/٢			ـ٠ر٥٧١٧	ـ٠ر٤٥٥٢	ـ١ر٠٢٦٩	ـ١ر٠٢٦٩
ح/٢		١ر٠٠٠٠		ـ١ر٠٣٧	٠ر٨٩٦٣	٠ر٨٩٦٣
الأول ـ د/٣			٠ر٧٥٣٦	ر٥٩٩٩	١ر٣٥٣٥	١ر٣٥٣٥
د/٢		ـ٠ر١٤٧٦		ر٠١٥٣	ـ٠ر١٣٢٣	ـ٠ر١٣٢٣
المجموع د/١		ـ٠ر١٤٧٦	٠ر٧٥٣٦	٠ر٦١٥٢	١ر٢٢١٢	١ر٢٢١٢
ح/١	١ر٠٠٠٠			٠ر٣٣١٤	١ر٣٣١٤	١ر٣٣١٤

ونظرا لأن هذا الجدول يحتوى على حل لثلاث معادلات فى ثلاث مجاهيل فانه يحتاج الى خطوة أضافية فى كل من الحل المباشر والحل العكسى • ففى الحل المباشر نجد أن العمل يستمر فى القسم الثالث بحذف المعادلة الاولى من القسم الثانى ، وبذلك تبقى المعادلة أ/٣ وبقسمة هذه على أول عدد فيها نحصل على ب/٣ التى هى أول جزء من الجواب ولذلك فهى أيضا حـ/٣ •

أما فى الجزء العكسى فان د/٣ نحصل عليها من ضرب ب/٣ فى معامل $ص_{١}$ فى القسم الثانى فى أول سطور الجزء ب أى ب/٢ وهو ـ٥٧١٧ر٠ وهذا هو السطر الوحيد ولذلك فهو أيضا د/٢ • وبطرح د/٢ من ب/٢ فى القسم الثانى نحصل على حـ/٢ وهى الجزء الثانى من الجواب • أما فى الجزء الاول وهو الاخير (لاننا نتحرك فى الاتجاه العكسى) نبدأ بالرجوع الى السطر ب/١ من القسم الاول ثم نحصل على د/٣ بضرب حـ/٣ فى معامل $ص_{١}$ ثم نحصل على د/٢ بضرب حـ/٢ فى معامل $ع_{٢}$ وبجمع هذين السطرين نحصل على د/١ وهذا نطرحه من ب/١ للحصول على حـ/١ وهو الجزء الاخير من الجواب • وبذلك تكون المعادلة هى

$$ص_{\cdot} = ٣٣١٤ر٠\, ع_{١} - ١٠٣٧ر٠\, ع_{٢} + ٧٩٦١ر٠\, ص_{١} + ب^{٨}_{\cdot} + ق$$

وطبيعى أن هذا الاسلوب يمكن تعميمه لأى عدد من المتغيرات ، مع ملاحظة أن ترتيب المعادلات غير هام ، وان كان من الافضل استخدام الاسلوب المقترح بعاليه لضمان أن تكون الاعداد الاولى من السطور أ فى الاقسام المتتالية كبيرة نسبيا وغير سالبة ، على الاقل فى الجزء الاول من الحل •

ونظرا لأن عدد المتغيرات المساعدة كان هو مجرد العدد الكافى للحصول على تقديرات ، فاننا لا نملك أى اختبار للازدواج[1] كما أننا الانزال[2] نحتاج الى وسيلة لحساب الاخطاء المعيارية للتقديرات ، وسوف نعالج هذا فيما بعد •

---

(١) فى صفحة ٦١ نعطى اختبارا احصائيا للأزدواج فى هذه الحالة • انظر كذلك مثال ٦

(٢) انظر صفحة ١٠٣ من هذه المذكرة •

ثالثا ـ طريقة الأنحدار المرجح

١٢ ـ نظرية كوبمانز :

ذكرنا من قبل أن كوبمانز نجح فى اثبات صحة النتائج العامة التى استخلصها فريش من دراسته ، ولكنه استخدم فى ذلك النظرية الاحصائية الرياضية ، وقد تقدم فى دراسته خطوات أوسع مستعينا فى ذلك بنظريات توصل اليها بعض الكتاب القدامى مثل بيرسون ، رودز ، فان أوفن . ويمكن تلخيص النظرية فى الاتى :

لنفرض أن المعادلة المطلوب تقدير معالمها هى (١) . ولنفرض أنه كانت لدينا معلومات عن العزوم للاجزاء الحقيقية من المتغيرات : $\tilde{\underline{\underline{م}}}_{صص}$ (وهى مصفوفة من الدرجة : م × م) . فتكون المعادلات المطلوب حلها للحصول على تقديرات المعالم $\underline{أ}$ هى :

$$\underline{أ} \cdot \tilde{\underline{\underline{م}}}_{صص} = \underline{صفر}$$

ولابد لحل هذه المعادلات حلا صحيحا من أن يكون محدد مصفوفة العزوم يساوى الصفر

$$\left| \tilde{\underline{\underline{م}}}_{صص} \right| = صفر$$

لنفرض الآن أنه بسبب أخطاء المشاهدة كانت لدينا المصفوفة $\underline{\underline{م}}_{صص}$ المحسوبة من المشاهدات مختلفة عن المصفوفة السابقة . ولنفرض أننا علمنا مصفوفة عزوم الاخطاء : $\underline{\underline{م}}_{طط}$. واضح أنه نظرا لان $\tilde{\underline{ص}} = \underline{ص} - \underline{ط}$ ونظرا لاستقلال الاخطاء عن الاجزاء الحقيقية فان :

$$\underline{\underline{م}}_{صص} = \tilde{\underline{\underline{م}}}_{صص} + \underline{\underline{م}}_{طط}$$

ومنها

$$\left| \tilde{\underline{\underline{م}}}_{صص} \right| = \left| \underline{\underline{م}}_{صص} - \underline{\underline{م}}_{طط} \right| = صفر$$

بعبارة أخرى لو توفرت لنا بيانات عن $\underline{\underline{م}}_{طط}$ لامكن حل مجموعة المعادلات السابقة للحصول على تقديرات المعالم $\underline{أ}$. وتعتمد هذه النظرية على توفر هذه المعلومات عن طريق آخر . ولكن

هذا لا يضمن أن تكون العزوم ع صص المحسوبة من العينة التى لدينا محتوية على الأخطـاء ط بنفس توزيع المجتمع . ولذلك فسنعيد صياغة المسألة كالآتى :

لنفرض أن ع ط ط هى مصفوفة عزوم الأخطاء فى المجتمع . بينما أن المصفوفة ع صص المحسوبة من العينة تختلف عن مصفوفة عزوم المشاهدات فى المجتمع وفقا لعامل تناسب معين وليكن هو ى مثلا . أى أن ع صص = ى × المصفوفة الحقيقية ،فتكون المصفوفة الحقيقية هى $\frac{1}{ى}$ ع صص . ويكون الشرط للمجتمع هو(1) .

| $\frac{1}{ى}$ ع صص ـ ع ط ط | = صفر

أو بضرب الطرفين فى ى فان

| ع صص ـ ى ع ط ط | = صفر (٢٧)

هذه المعادلة تسمى المعادلة المحددية determinantal equation لأنها تحتوى على محدد يُساوى بالصفر . وواضح أن حل المحدد سوف يعطى قوى فى ى أكبرها هو م نظرا لأن المحدد من الدرجة م ولذلك فالمعادلة لها م من الجذور ، وتنشأ هنا مشكلة اختيار الجذر المناسب . فنلاحظ أنه لو لم تكن العلاقة المدروسة تامة فان هذا يعنى أن هناك جزء من المعادلة ناقص ويجب تعويضه عن طريق كبر ى . ولذلك فاننا نتوقع أن الجذر المطلوب هو أصغر الجذور التى تجعل مصفوفة المحدد فى (٢٧) صفرية المحدد أى رتبتها أقل من م .

ولكن اذا كان هناك علاقتان فان رتبة المصفوفة سوف تكون أقل من (م ـ ١) وهكذا . ولذلك فان هناك حاجة لاختبار رتبة المصفوفة فاذا كانت الرتبة هى ر فان عدد العلاقات التامة يكون هو م ـ ر . وهذا يدل على وجود أزدواج خطى . فاذا كانت ر = م ـ ١ فان هذا يدل على أن هناك معادلة واحدة وبالتالى ينتفى الازدواج .

---

(1) هذا البرهان مبسط لأن النظرية تعتمد فى صورتها الأصلية على النظرية الأحصائية المتقدمة للتقدير ، بتطبيق ما يعرف بنظرية أعظم الأمكان . وليس هنا مجال لمعالجة الموضوع على هذا المستوى .

١٢ ـ نظرية تنتنر :

قام الكاتب الأمريكى تنتنر [1] بتطوير نظرية كوبمانز التى أطلق عليها أسم نظرية الانحدار المرجح weighted regression باعتبار أن المتغيرات المختلفة تعطى أوزانا تتناسب مع أهمية الخطأ فى مشاهدتها (تمييزا لها عن النظريات التى تساوى فى توزيع الخطأ بين المتغيرات كما هو الحال فى نظرية فريش أو غيرها من النظريات كنظرية الانحدار المتعامد)

وأهم ما أتى به تنتنر هو طريقة تقدير المصفوفة ك ط ط من البيانات نفسها غير أنه افترض أن البيانات هى سلسلات زمنية ، وأن الجزء الحقيقى يتغير بصورة منتظمة مع الزمن بحيث أن الانحرافات عن الدوال الزمنية يعتبر راجعا الى خطأ فى المشاهدة . واستخدم لذلك طريقة الفروق ، التى تعتمد على محاولة تعيين درجة كثيرة الحدود الزمنية التى تعبر عن التغيرات المنتظمة فى المتغير ، عن طريق أخذ الفروق الأولى ثم الثانية وهكذا وتقدير تباين الخطأ بتباين الفروق التى تنتفى بعدها معنوية اختلافات الفروق من الدرجات الأعلى . ويمكن الرجوع فى تفاصيل هذه الطريقة الأخيرة الى كتاب تنتنر [2]

وما يهمنا هنا هو أنه اذا قبلنا هذا الأسلوب فلابد أن تكون البيانات عبارة عن سلاسل زمنية متصلة . ومن جهة أخرى فان تقدير تباين الأخطاء يتم بأسلوب مستقل عن عملية التقدير ذاتها . فضلا عن ذلك فان هذا الأسلوب ينتهى فى النهاية الى تقدير التباينات فقط أى أنه "لا يعطى تقديرا لتغايرات الأخطاء مما يجعلنا نفترض بالضرورة أن الأخطاء مستقلة عن بعضها البعض" . ولو أن الصورة العامة للنظرية لاتزال قائمة تعالج الحالة التى فيها الأخطاء غير مستقلة .

فاذا قبلنا هذه الفروض فان مصفوفة عزوم الأخطاء تقتصر على التباينات

$$\text{ك ط ط} = \begin{bmatrix} \text{ى}_1 & \text{صفر} & \cdots & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{ى}_2 & \cdots & \text{صفر} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{صفر} & \text{صفر} & & \text{ى}_\text{م} \end{bmatrix}$$

---

(1) G. Tintner: Econometries, pp. 121 - 153

(2) ibid. pp. 308 - 322.

وبذلك يكون المحدد الواجب البحث عن جذوره هو

$$\left| \text{ع}_{\text{ص ص}} - \text{ك}\ \text{ع}_{\text{ط ط}} \right| = \left| \begin{array}{cccc} \text{م}_{١١} - \text{ك}\,\text{ى}_{١} & \text{م}_{٢١} & \cdots & \text{م}_{\text{م}١} \\ \text{م}_{١٢} & \text{م}_{٢٢} - \text{ك}\,\text{ى}_{٢} & \cdots & \text{م}_{\text{م}٢} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{م}_{١\text{م}} & \text{م}_{٢\text{م}} & \cdots & \text{م}_{\text{م م}} - \text{ك}\,\text{ى}_{\text{م}} \end{array} \right| = \text{صفر}$$

فعند ايجاد قيمة المحدد نجد أن أعلى قيمة لأُس المجهول ك هى التى نحصل عليها بضرب جميع الحدود القطرية فى بعضها ، أى م . وبذلك تكون المعادلة لها م جـــذر ، وبعبارة اخرى فهناك م حل ممكن . وتنشأ مشكلة اختيار الجذر المناسب .

وكما ذكرنا من قبل فانه اذا كانت هناك علاقة تامة فأن الجذر الاصغر $\text{ك}_{١}$ يكون صغيرا فى قيمته (قريبا من الوحدة) . اما اذا كانت هناك اكثر من علاقة فان الجذور التالية تكـون هى الاخرى صغيرة مما يجعل رتبة المصفوفة أقل من م ــ ١ . ولهذا الغرض يستخــدم تنتشر اختبارات وضع صيغتها بعض الكتاب الاخرين أهمها هو الاختبار الاتى :

لنفرض أننا نريد اختبارما اذا كانت رتبة المصفوفة هى م ــ ر مما يعنى أن هناك ر من العلاقات التامة بين نفس المتغيرات . لذلك نقوم بتكوين الدوال :

$$\text{ل}_{\text{ر}} = (\text{ن} - ١) \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ر}} \text{ك}_{\text{هـ}} \qquad (\text{ر} = ١ ، ٢ ، \ldots)$$

فاذا كانت هناك ر علاقة فعلا فأن هذه الدالة تتوزع حسب $\text{كا}^{٢}$ بدرجـــات حرية هى ر (ن ــ ١ ــ م + ر) . لذلك نبدأ بوضع ر = ١ ونختبر الجـــــذر الاصغر $\text{ك}_{١}$ للتأكد من أن المقدار (ن ــ ١) $\text{ك}_{١}$ يقل عن قيمة $\text{كا}^{٢}$ عند مستوى الثقـــة المطلوب بدرجات حرية = (ن ــ م) . فاذا كانت قيمة (ن ــ ١) $\text{ك}_{١}$ أكبر من قيمـــة $\text{كا}^{٢}$ المعنوية فأن معنى هذا أنه لا توجد أية علاقة تامة بين المتغيرات المدروسة .

اما اذا كانت القيمة أقل من $\text{كا}^{٢}$ المجدولة فأننا ننتقل الى اختبار $\text{ك}_{٢}$ ولذلك نحسب (ن ــ ١) ($\text{ك}_{١}$ + $\text{ك}_{٢}$) ونختبرها بواسطة $\text{كا}^{٢}$ بدرجات حرية = ٢ (ن ــ م + ١) أى نضيف واحد الى الدرجات السابقة ثم نضرب الناتج فى ٢ . وهنا تواجهنا احدى حالتين :

فاما تكون القيمة أكبر من $كا^2$ المجدولة مما يدل على أن رتبة المصفوفة أكبر من م ـ ٢ ، ونظرا لانهـــا كانت بحكم الاختبار الاول م ـ ١ أو أقل فأن معنى هذا أنها فعلا م ـ ١ مما يدل على وجـــود علاقة واحدة تامـــة ٠

أو أن تكون القيمة أقل مما يعنى أن الرتبة م ـ ٢ أو أقل وبالتالى فهناك علاقتان على الاقـــل كل منهما تناظر احد الجذرين ٠ وبعبارة اخرى فأن هذا ينهض دليلا على وجود الازدواج الخطى ، وبالتالى لا يمكن تقدير معالم جميع المتغيرات فى أى من العلاقتين الا اذا استبعدنا بعـــــض المتغيرات من العلاقة ٠ ومن الممكن أن نستمر فى الاختبارات حتى نصل الى جذر معين رقم $ر$ تكون قيمة الدالة عنده معنوية وبذلك يكون هناك ($ر$ ـ ١) علاقة تامة بين نفس المتغيرات ، وعلينـــا أن نحاول أن نفسر السبب فى هذا بالرجوع الى النظرية الاقتصادية ٠

فاذا كانت هناك علاقة واحدة فقط وفقا لهذه الاختبارات فان وضع ك = $ك_1$ يضمن تحقق (٢٧) وبذلك يمكن حل مجموعة المعادلات الاتيـــة

$$\hat{\underline{\text{أ}}} \left[\underline{\text{م}}_{\text{صص}} - \text{ك}_1 \, \underline{\text{م}}_{\text{طط}} \right] = \text{صفر} \qquad (٢٨)$$

لكى نحصل على قيم التقديرات $\hat{\text{أ}}$ بوضع $\hat{\text{أ}}_0$ مثلا تساوى ـ ١ ٠

<u>مثال (٥) :</u> فى بحث أجراه تنتنر من أجل تقدير معالم دالة الانتاج للاقتصاد الامريكى استخدم البيانات الاتية عن الفترة ١٩٢١ ـ ١٩٤١ (أى ٢١ سنة ، ن = ٢١)

$ص_0$ = لوغاريتم الناتج الصافى فى قطاع الاعمال الخاص بأسعار ١٩٣٤

$ص_1$ = لوغاريتم عدد العمال الزراعيين والصناعيين بالمليون

$ص_2$ = لوغاريتم رأس المال الثابت فى الدولة مقدرا بأسعار ١٩٣٤ ٠

وقد افترض أنه فيما عدا أخطاء المشاهدة فأن هناك علاقة تامة بين اللوغاريتمات مع أدخـــال الزمن كمتغير أضافى $ع_1$ فى العلاقة وهو مشاهد بطبيعة الحال بدون خطأ ٠ كما افترض أن هـذه الاخطاء مستقلة عن بعضها البعض ، واستخدم فى تقدير تبايناتها طريقة الفروق فحصل علـــى النتائج الاتيـــة :

المتغير	متوسطــــه	تباين الخطأ مضروبا فى ١٠ ٠٠٠
ص٠	١ر٧٦٨٨	٢ر٦٤٥٣
ص١	١ر٦٥١٧	١ر٢١٠٣
ص٢	٢ر٠٥١٢	٠ر٠١١٢

وبحساب عزوم المتغيرات حول الوسط الحسابى ، مع ضرب عزوم المتغيرات ص فى ١٠ ٠٠٠ (كما فعلنا بالنسبة للاخطاء) ، وقياس ع بوحداتها الاصلية ، نحصل على مصفوفة العزوم :

ص٠	٥٦ر٢٨٥٠			
ص١	١٨ر٧٠٨٥	٩ر٣١٣٥		
ص٢	٤ر٥٠٠٥	٠ر٠٠٤٥	٣ر٠٩٠٥	
ع١	٢٥ر٠٢٠٠	٠ر٥١٥٥	٦ر٠٦٧٥	٣٨ر٥٠٠

وتكون المعادلة المحددية هــــى :

(٥٦ر٢٥٠ ـ ١ر٧٦٨٨ ى)	١٨ر٧٠٨٥	٤ر٥٠٠٥	٢٥ر٠٢٠٠
١٨ر٧٠٨٥	(٩ر٣١٣٥ ـ ١ر٢١٠٣ ى)	٠ر٠٠٤٥	٠ر٥١٥٥
٤ر٥٠٠٥	٠ر٠٠٤٥	(٣ر٠٩٠٥ ـ ٠ر٠١١٢ ى)	٦ر٠٦٧٥
٢٥ر٠٢٠٠	٠ر٥١٥٥	٦ر٠٦٧٥	٣٨ر٥٠٠٠

= صفر

ونظرا لان المتغير ع١ خال من الخطأ (تباين خطئه = صفر) فقد كتبنا تباينه كما هو ٠
وبحساب أصغر جذرين (١) نجد أن :

ى١ = ٠ر٠٥٤٨٢

ى٢ = ٢٢ر٣٠٤

ولاختبار اولهما نوجد قيمة

(ن ـ ١) ى١ = ٢٠ × ٠ر٠٥٤٨٢ = ١٠ر٩٦٤

---

(١) يمكن الرجوع الى كتب جبر المصفوفات لمعرفة كيفية حساب الجذور ٠ انظر كذلك صفحـــة ٣٥١ من كتاب تنتنر ٠

ونقارن هذه بقيمة $\text{كا}^{٢}$ بدرجات حرية = (٢١ـ٤) = ١٧ وهى ٢٧ر٥٨٧ عند ٥ ٪ ، أى أن القيمة المشاهدة غير معنوية وبذلك نقبل وجود علاقة تامة . وهذا يوجب اختبار الجـــذر الثانى عن طريــق

$$(\text{ن}-١)(\text{ى}_{١}+\text{ى}_{٢}) = ٢٠ \times (٠\text{ر}٥٤٨٢ + ٢٢\text{ر}٣٠٤) = ٤٥٧\text{ر}٠٤٤$$

ونقارن هذه القيمة بقيمة $\text{كا}^{٢}$ بدرجات حرية = ٢ × (١٧+١) = ٣٦ وهى ٥٠ر٧١٤ عند ٥ ٪ ، ٥٧ر٨٠٤ عند ١ ٪ . مما يشير الى عدم وجود علاقة اخرى تامة بين نفس المتغيرات ، ولــــذلك نستطيع أن نعوض بقيمة $\text{ى}_{١}$ = ٠ر٥٤٨٢ للحصول على قيم $\hat{\text{أ}}$ مع افتراض أن $\text{أ}_{٠} = -١$

$$\begin{bmatrix} ٥٥\text{ر}٢٨٠٣ & ١٨\text{ر}٧٠٨٥ & ٤\text{ر}٥٠٠٥ & ٢٥\text{ر}٠٢٠٠ \\ ١٨\text{ر}٧٠٨٥ & ٨\text{ر}٦٥٠٠ & ٠\text{ر}٠٠٤٥ & ٠\text{ر}٥١٥٥ \\ ٤\text{ر}٥٠٠٥ & ٠\text{ر}٠٠٤٥ & ٣\text{ر}٠٨٤٤ & ٦\text{ر}٠٦٧٥ \\ ٢٥\text{ر}٠٢٠٠ & ٠\text{ر}٥١٥٥ & ٦\text{ر}٠٦٧٥ & ٣٨\text{ر}٥٠٠٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ \\ \hat{\text{أ}}_{١} \\ \hat{\text{أ}}_{٢} \\ \hat{\text{أ}}_{٣} \end{bmatrix} = \text{صفر}$$

وطبيعى أن محدد المصفوفة فى هذه المعادلة الاخيرة يساوى الصفر ، ولذلك لا معـــنى لمحاولة الحل بحساب المقلوب والضرب فيه . ولتبيين كيفية الحل نقوم باعادة كتابة هذه المعادلات كالاتـــى :

$$١٨\text{ر}٧٠٨٥\ \hat{\text{أ}}_{١} + ٤\text{ر}٥٠٠٥\ \hat{\text{أ}}_{٢} + ٢٥\text{ر}٠٢٠٠\ \hat{\text{أ}}_{٣} = ٥٥\text{ر}٢٨٠٣$$

$$٨\text{ر}٦٥٠٠\ \hat{\text{أ}}_{١} + ٠\text{ر}٠٠٤٥\ \hat{\text{أ}}_{٢} + ٠\text{ر}٥١٥٥\ \hat{\text{أ}}_{٣} = ١٨\text{ر}٧٠٨٥$$

$$٠\text{ر}٠٠٤٥\ \hat{\text{أ}}_{١} + ٣\text{ر}٠٨٤٤\ \hat{\text{أ}}_{٢} + ٦\text{ر}٠٦٧٥\ \hat{\text{أ}}_{٣} = ٤\text{ر}٥٠٠٥$$

$$٠\text{ر}٥١٥٥\ \hat{\text{أ}}_{١} + ٦\text{ر}٠٦٧٥\ \hat{\text{أ}}_{٢} + ٣٨\text{ر}٥٠٠٠\ \hat{\text{أ}}_{٣} = ٢٥\text{ر}٠٢٠٠$$

ومعنى هذا أننا فى الواقع نحاول حل ٤ معادلات غير متجانسة (بها حد مطلق) فــى ٣ مجاهيل ، ومثل هذا الحل غير ممكن الا اذا كانت معادلة منها تحقق الحل الذى نحصل عليـــه من المعادلات الثلاث الاخرى ، وهذا هو السبب فى أننا اشترطنا أن يكون المحدد يســاوى الصفــر .

ولذلك نكتفى بأخذ ٣ معادلات فقط ونحلها معا ، ثم نراجع الحل بالتعويض فى المعادلة

الرابعة ، ولو اننا استبعدنا المعادلة الاولى لحصلنا على المعادلات الاتيـــة :

$$\begin{bmatrix} \text{٨ر٦٥٠٠} & \text{٠ر٠٠٤٥} & \text{٠ر٠٥١٥٥} \\ \text{٠ر٠٠٤٥} & \text{٣ر٠٨٤٤} & \text{٦ر٠٦٧٥} \\ \text{٠ر٠٥١٥٥} & \text{٦ر٠٦٧٥} & \text{٣٨ر٥٠٠٠} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\text{أ}}_{\text{١}} \\ \hat{\text{أ}}_{\text{٢}} \\ \hat{\text{أ}}_{\text{٣}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١٨ر٧٠٨٥} \\ \text{٤ر٥٠٠٥} \\ \text{٢٥ر٠٢٠٠} \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن المصفوفة اليمنى متماثلة مما يسهل حسابمقلوبها وحل المعادلات معا للحصـول على التقديرات المطلوبة وهـــى :

$$\hat{\text{أ}}_{\text{١}} = \text{٢ر١٢٨٨} \qquad \hat{\text{أ}}_{\text{٢}} = \text{٠ر٣٣٨٧} \qquad \hat{\text{أ}}_{\text{٣}} = \text{٠ر٠٥٦٨٠}$$

ولكن يجب أن نلاحظ أن المتغيرات ص مضروبة فى ١٠٠ لان عزومها مضروبة فى ١٠ ٠٠٠ وبذلك فـأن :

$$\text{١٠٠ ص}_{\text{٠}} = \text{٢ر١٢٨٨} \, (\text{١٠٠ ص}_{\text{١}}) + \text{٠ر٣٣٨٧} \, (\text{١٠٠ ص}_{\text{٢}}) + \text{٠ر٠٥٦٨٠ ع}_{\text{١}}$$

$$\therefore \quad \text{ص}_{\text{٠}} = \text{٢ر١٢٨٨ ص}_{\text{١}} + \text{٠ر٣٣٨٧ ص}_{\text{٢}} + \text{٠ر٠٠٥٦٨ ع}_{\text{١}} - \text{٢ر٤٤٢١} + \text{ق}$$

ويكون الحد المطلق هو

$$\bar{\text{ص}}_{\text{٠}} - \text{٢ر١٢٨٨} \, \bar{\text{ص}}_{\text{١}} - \text{٠ر٣٣٨٧} \, \bar{\text{ص}}_{\text{٢}} = - \text{٢ر٤٤٢١}$$

باعتبار أن الزمن مقاس من ع$_{\text{١}}$ = ١٩٣١ ومتوسطه بالتالى = صفر .

ولو اننا استخدمنا المربعات الصغرى لكان التقدير كالاتـــى :

$$\text{ص}_{\text{٠}} = \text{١ر٩٧٧٠ ص}_{\text{١}} + \text{٠ر٣٣٢٤ ص}_{\text{٢}} + \text{٠ر٠٠٥٧١ ع}_{\text{١}}$$

رابعا ـ النظرية العامة للمتغيرات المساعدة

١٤ ـ نظرية جيري وبارتلت :

رأينا أن نظرية رايرسول كانت تعتمد على اختيار المتغيرات المساعدة بحيث تكون وثيقة الصلة بالأجزاء الحقيقية للمتغيرات المدروسة وفى نفس الوقت مستقلة عن أخطاء المشاهدة ٠ ومن جهة أخرى أظهرت نظرية الانحدار المرجح أنه لو استطعنا الحصول على وسيلة لتقدير مصفوفة عزوم الأخطاء فسوف يصبح من السهل اجراء أمرين هما تقدير المعالم واختبار الازدواج الخطى ، لذلك فسوف نحاول فيما يلى الجمع بين الفكرتين للاستفادة من مزايا كل منهما ٠ والنظرية التى نعرضها الآن (1) تعتمد على فكرة تقدم بها كل من جيرى (2) وبارتلت (3) ، والتى تتلخص فى الآتى :

لنفرض أن هناك علاقة تامة بين الأجزاء الحقيقية للمتغيرات المدروسة $\tilde{ص}_{ر}$ التى عددها م ، وأن هذه الأجزاء الحقيقية هى ـ كما افترض تنتنر عندما اقترح اتخاذ الفروق الزمنية أساسا لتقدير الأخطاء ـ دوال فى الزمن وقواه التصاعدية

$$\tilde{ص}_{ر} = حـ_{.} + حـ_{1ر} ع + حـ_{2ر} ع^{2} + \dots\dots + حـ_{لر} ع^{ل}$$

حيث ع هى الزمن ، $ل \geq م$ ٠ وبذلك فاذا حسبنا انحدار المشاهدات $ص_{ر}$ على القيم ع ، $ع^{2}$ ، ٠٠٠٠ فان بواقى الانحدار تكون هى تقديرات للأخطاء ، وبالتالى فان عزوم هذه البواقى هى تقديرات عزوم الأخطاء ٠ ثم يستمر العمل بنفس طريقة الانحدار المرجح ٠

غير أن هذا لا يعنى أننا قد تخلصنا من كل عيوب الفروض التى أقام عليها تنتنر طريقته ٠ فرغم أن شرط استقلال الأخطاء لم يعد ضروريا ، ورغم أن حساب عزوم الأخطاء يتبع الطرق الاحصائية المألوفة لاننا نستطيع تقدير معالم الدوال الزمنية بواسطة طريقة المربعات الصغرى ،

---

(1) M.M. El-Imam: The Consumption Function for the U.K. during the period 1929-1938, Vol. I, pp. 367. Unpublished Ph.D. Thesis.

(2) R.C. Geary: " Studies in the relations between economic time series" - J.R.S.S., 1948. pp. 1-19.

(3) M.S. Bartlett: "A note on the statistical estimation of supply and demand relations from time series" - Econometrica, 1948 , pp. 323-329.

فان الاستمرار فى التمسك بالدوال الزمنية يعنى أننا لن نستطيع أن نطبق هذا الاسلوب اذا كانت نقط المشاهدة غير زمنية • أضف الى ذلك أن المتغيرات التى تتغير بصورة غير منتظمة مع الزمن (كالصادرات مثلا) لا يلزم أن تكون هى المتغيرات المحتوية على قدر أكبر من غيرها من الخطأ ، والعكس بالعكس •

بل انها بجانب هذه العيوب التى تشترك فيها مع النظرية السابقة ، تنطوى على عيب آخر ، هو أن الدوال الزمنية التى تلزم لحساب تقديرات الاخطاء لا يلزم أن يكون عددها ل أكبر من م (معنويا) مما يثير مشاكل فى التقدير سوف يتضح لنا مغزاها فيما بعد •

١٥ — تعميم نظرية المتغيرات المساعدة

ولتصحيح هذه العيوب ، وفى نفس الوقت للتمكن من تعميم النظرية ، فسوف نفترض أن هناك عددا من المتغيرات الاقتصادية المستقلة عن أخطاء المشاهدة والتى يمكن أن نعتبرها ممثلة للاجزاء الحقيقية فى المتغيرات المدروسة ، ولنرمز لها بالرموز $\text{ع}_{\text{هـ}}$ (هـ = ١ ، ٢ ، ••• ، ل) حيث ل $\geqslant$ م — ١ • ونختار هذه المتغيرات كما فعلنا من قبل عند دراسة نظرية راير سول • وواضح أن الحالة ل = م — ١ هى الحالة التى عالجها راير سول •

فاذا كانت العلاقة المدروسة هى :

$$\underline{\text{أ}}\ \underline{\underline{\text{ص}}} = \underline{\text{ق}} \qquad (٢٩)$$

واعتبرنا أن كلا من هذه المتغيرات المشاهدة يحتوى على خطأ يقدر ببواقى الانحدار على المتغيرات $\underline{\underline{\text{ع}}}$ المساعدة ، فان تقدير مصفوفة معاملات انحدار جميع المتغيرات $\underline{\underline{\text{ص}}}$ على جميع المتغيرات $\underline{\underline{\text{ع}}}$ يمكن أن يتم بالمربعات الصغرى ويكون هو $\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صع}}\ \underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{عع}}$ فاذا رمزنا الى مصفوفة عزوم البواقى بالرمز $\underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}}$ فان

$$\underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} = \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صص}} - \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صع}}\ \underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{عع}}\ \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عص}} \qquad (٣٠)$$

هذه المصفوفة يمكن استخدامها مكان $\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{طط}}$ وبذلك نكون المعادلة

$$\hat{\text{أ}}\left[\text{م}_{\text{ص ص}} - \text{ى}\,\text{ك}_{\text{ص ص}}\right] = \text{صفر} \qquad (٣١)$$

وحل هذه المعادلة يتطلب أن تكون ى جذرا للمعادلة المحددية التى تناظر (٢٧) وهى :

$$\left|\,\text{م}_{\text{ص ص}} - \text{ى}\,\text{ك}_{\text{ص ص}}\,\right| = \text{صفر} \qquad (٣٢)$$

وهنا أيضا نختار $\text{ى}_{١}$ أصغر الجذور ، الذى يمكن اثبات أنه لن يقل عن الواحد الصحيح[١] وهو يساوى الواحد الصحيح عدديا فقط فى الحالة التى يكون فيها عدد المتغيرات المساعدة يكاد يكفى للتقدير ، وهى الحالة التى عالجها رايرسول وفيها ل = م—١ . أما فيما عدا ذلك فان قيمته النظرية قد تكون هى الواحد الصحيح ومع ذلك فان القيمة المحسوبة من العينة تختلف عن الواحد بسبب أخطاء عشوائية . ولكن ماهو مغزى الجذور فى هذه الحالة ؟

لو فرض أن البيانات التى لدينا كانت هى بيانات المجتمع بمعنى أن $\text{م}_{\text{ص ص}}$ هى عزوم المشاهدات فى المجتمع ، $\text{ك}_{\text{ص ص}}$ هى فعلا عزوم الأخطاء فى المجتمع وكانت هناك فعلا علاقة تامة بين الأجزاء الحقيقية التى تكون عزومها هى ($\text{م}_{\text{ص ص}} - \text{ك}_{\text{ص ص}}$) فان معنى هذه العلاقة أن يكون محدد هذه المصفوفة الأخيرة يساوى الصفر . ولكن المصفوفة ان هى الا مصفوفة المعادلات (٣١) مع وضع ى = ١ ، ولذلك نقول أنه فى مثل هذه الحالة يجب أن تكون قيمة أصغر الجذور فى المجتمع هى الواحد . وبالتالى فان كل ما يحدث عندما تكون البيانات هى من عينة ، أن تختلف قيمة $\text{ى}_{١}$ عن الواحد بخطأ عشوائى ، ومن هنا لو ثبت باختبار معنوية مناسب أن احتمال الاختلاف عن الواحد ليس كبيرا فان هذا يشير الى وجود علاقة تامة .

ومن جهة أخرى اذا كانت هناك علاقة ثانية فى المجتمع فان الجذر الثانى هو الآخر يكون هو الوحدة ، ولذلك يمكن عند قبول الجذر الأول أن نختبر الجذر الثانى لنتأكد من أنه يختلف معنويا عن الوحدة ، والا كان هناك ازدواج خطى ولكن ماهو معنى كبر قيمة الجذر فى المجتمع عن الوحدة ؟

---

(١) الأسلوب المتبع هنا فى اثبات النظرية أسلوب مبسط ، وهو يعرض النتيجة التى يمكن الوصول اليها باستخدام نظرية التقدير الاحصائى المعروفة بأعظم الامكان وبذلك يحقق الصفات المرغوبة التى تحققها تلك النظرية فى التقديرات .

بما أن المصفوفة $\underline{\underline{ك}}$ تمثل فعلا عزوم الأخطاء التى يجب أن تستبعد من عزوم المشاهدات للحصول على عزوم الأجزاء الحقيقية فان كبر قيمة الجذر عن الوحدة معناه أن هناك خطأ آخر يؤثر بصفة عامة فى جميع المتغيرات الى جانب أخطاء المشاهدة فيها . ويتمثل هذا الخطأ فى الفرق بين $ك_1 \times \underline{\underline{ك}}$ وبين $\underline{\underline{ك}}$ أى فى المقادير $(ك_1 - 1)\ \underline{\underline{ك}}$. وبما أن $\underline{\underline{ك}}$ استنفذت أخطاء المشاهدة ، فان هذا الفرق فى الواقع يمثل خطأ فى المعادلة ذاتها بمعنى أن العلاقة لم تكن تامة كما افترضنا . ولذلك فان كبر قيمة $ك_1$ يعنى أننا نستطيع حساب تقديرات المعالم ولكن المعادلة تحتاج الى استكمال .

بالمثل فان كون قيمة $ك_1$ النظرية هى الوحدة بينما قيمة $ك_2$ النظرية أكبر من الوحدة يعنى أن هناك علاقة واحدة تامة ، أما باقى العلاقات (التى عددها م — ١ مقابل باقى الجذور) فكلها غير تامة مما ينفى وجود الازدواج ، وبالعكس اذا كان الجذر الثانى هو الآخر توقعه الوحدة . وعموما فان عدد الجذور التى يكون توقعها هو الوحدة يشير الى عدد المعادلات التامة التى تربط نفس المتغيرات

ولاختبار الجذور نستخدم القاعدة التالية التى توصل اليها أندرسون واقترح جيرى استخدامها :

اذا كانت $ك_1$ ، $ك_2$ ، ... ، $ك_ر$ $(ر \geq م)$ هى ر الجذور الصغرى للمعادلة المحددية (٣٢) حيث $\underline{\underline{ك}}_{ص ص}$ محسوبة وفقا للمعادلة (٣٠) وكانت القيمة النظرية لكل من هذه الجذور هى الواحد الصحيح فان المقدار

$$ن\ لو_{هـ}\ (ك_1\ ك_2\ ....\ ك_ر)\ \text{يتوزع حسب كا}^2\ \text{بدرجات حرية} = ر\ (ل - م + ر) \qquad (٣٣)$$

وواضح أن درجات الحرية لن تكون سالبة الا اذا كانت

$$ل \geq م - ١ \qquad (٣٤)$$

ففى الحالة التى عالجها رايرسول ، والتى كانت فيها ل = م — ١ نجد أن درجات الحرية عندما ر = ١ هى الصفر ، بينما درجات الحرية عندما ر = ٢ هى ٢ ، ولذلك نجد أن الجذر الأول سوف يساوى الواحد عدديا ولا يوجد اختبار له بينما أن الجذر الثانى يمكن

حساب قيمته التى قد تختلف عدديا ونظريا عن الواحد وبالتالى اختبار قيمته ٠ وبذلك نتوصل الى اجراء اختبار للازدواج فى الحالة الخاصة التى اقترحها رايرسول ٠ ولو أن عدم التمكن من اجراء اختبار الجذر الأول لا يدع لنا مجالا للتأكد من تمام العلاقة المدروسة (الا اذا ثبت أن الجذر الثانى لا يختلف عن الوحدة وهنا توجد علاقتان لا واحدة) ٠

اذن نقوم بحساب لوغاريتم كل من الجذرين الأولين بالنسبة الى الأساس هـ ,ولما كان لوغاريتم أى عدد للأساس هـ هو اللوغاريتم للأساس العادى ١٠ مضروبا فى لوغاريتم ١٠ للأساس هـ أو — وهو نفس الشىء — مقسوما على لوغاريتم هـ للأساس ١٠ ٠ فإن اجراء الحساب يتطلب حساب المقدار الأخير ٠

$$لو_{١٠}\ هـ = لو\ ٢٫٧١٨٢٨ = ٠٫٤٣٤٣$$

ومقلوب هذا اللوغاريتم هو : $لو_{هـ}\ ١٠ = \frac{١}{٠٫٤٣٤٣} = ٢٫٣٠٢٦$

ولذلك نحسب اللوغاريتمات العادية ثم نضربها فى هذا المقدار ثم فى ن ٠ وتكون الاختبارات هى :

(١) اختبار $ك_١$ بحساب المقدار (ن × ٢٫٣٠٢٦ × لو $ك_١$) ومقارنته بتوزيع $كا^٢$ بدرجات حرية (ل — م + ١)

(٢) اختبار $ك_٢$ بعد التأكد من أن $ك_١$ لا يختلف معنويا عن الواحد ٠ فيكون المقدار ن × ٢٫٣٠٢٦ × (لو $ك_١$ + لو $ك_٢$) موزعا حسب $كا^٢$ بدرجات حرية ٢ (ل — م+٢) أى نضيف واحدا للدرجات السابقة ثم نضرب فى ٢ ٠

وتتلخص نتائج الاختبارات فى التالى :

الجذر	غير معنوى	معنوى
$ك_١$	—	العلاقة غير تامة — ولكن يمكن حساب تقديرات معالمها ،لا داعى لاختبار $ك_٢$
$ك_١$ $ك_٢$	العلاقة تامة يجب أختبار $ك_٢$ هناك علاقة أخرى — أى ازدواج اذن لايمكن حساب تقديرات معالم المعادلة	— لا توجد علاقة أخرى — فيمكن حساب تقدير المعادلة باستخدام $ك_١$ ٠

<u>اختبار تقريبي</u> : من الممكن اجراء اختبار تقريبي يتفادى حساب اللوغاريتمات ، ولكنه لا يصح الا اذا كانت ن كبيرة ، اذ أنه فى هذه الحالة يكون

$ن\,(ك_{١} + ك_{٢} + \cdots + ك_{ر} - ر)$ هو الذى يتوزع حسب $كا^{٢}$ بنفس درجات الحرية . ولذلك نطرح واحدا من كل جذر ونضرب مجموع بواقى الطرح مباشرة فى ن باعتبار أن هذا الطرح يعطى تقريبا لقيمة اللوغاريتم المطلوب عندما تكون ن كبيرة . فاختبار $ك_{١}$ هو بالمقدار $ن\,(ك_{١} - ١)$ بينما اختبار $ك_{٢}$ هو بالمقدار $(ك_{١} + ك_{٢} - ٢) =$

$$ن \times \left[(ك_{١} - ١) + (ك_{٢} - ١)\right]$$

١٦ - <u>حالة وجود متغيرات بدون خطأ</u>

تعتبر الطريقة الأخيرة طريقة عامة يمكن تطبيقها فى جميع الحالات التى فيها عدد المتغيرات المساعدة يكفى أو يزيد عن احتياجات التقدير ، كما أنها تنطبق فى الحالات التى تكون فيها المتغيرات المساعدة دوال زمنية أو غير زمنية ، وأخيرا فانها تنطبق أيضا اذا كانت بعض المتغيرات مشاهدة بدون خطأ كما يتضح من الاتى :

لنفرض أنه من بين المتغيرات المدروسة التى عددها م ، كان هناك متغيرات عددها ف ≥ ٢ مشاهد بخطأ ، والباقى وعدده ق = م - ف مشاهد بدون خطأ . فى هذه الحالة نرمز الى المتغيرات المدروسة بالرموز ص ، $ع^{*}$ كما فعلنا من قبل ، وتكون المعادلة المطلوب تقديرها هى

$$\underline{ب}\;\underline{\underline{ص}} + \underline{حـ}\;\underline{\underline{ع}}^{*} = \underline{ق} \qquad (٣٥)$$

ثم نكوّن مجموعة المتغيرات المساعدة ع من المتغيرات $ع^{*}$ مضافا اليها المتغيرات المساعدة الاضافية $ع^{**}$ بشرط أن يكون عدد المتغيرات الأخيرة وليكن هـ مثلا كاف للتقدير بمعنى أن يكون هـ $\geq$ ف - ١ . بحيث اذا اعتبرنا أن ل = ق + هـ هو عدد المتغيرات ع ، فإن ل $\geq$ م - ١ ، كما سبق .

وبعد ذلك يجرى العمل على خطوتين :

(١) الاولى هى التخلص من المتغيرات ع^* . فبما أن هذه المتغيرات خالية من الاخطاء فهى بالتالى مستقلة عن الباقى ق فى المعادلة (٣٥) . ولذلك اذا ضربنا من اليسار فى $\text{ع}^{*\prime}$ ورمزنا الى حواصل الضرب بالرموز $\underline{\text{م}}_{\text{ص ع}^*}$ ، $\underline{\text{م}}_{\text{ع}^*\text{ع}^*}$ باعتبارها مصفوفات عزوم فاننا نحصل على المعادلات :

$$\underline{\text{ب}}\,\underline{\underline{\text{ص}}}\,\underline{\underline{\text{ع}}}^{*\prime} + \underline{\text{حـ}}\,\underline{\underline{\text{ع}}}^{*}\underline{\underline{\text{ع}}}^{*\prime} = \underline{\text{ب}}\,\underline{\text{م}}_{\text{ص ع}^*} + \underline{\text{حـ}}\,\underline{\text{م}}_{\text{ع}^*\text{ع}^*} = \underline{\text{صفر}}$$

ومنها نجد أنه لو علمت تقديرات $\underline{\hat{\text{ب}}}$ للمعالم $\underline{\text{ب}}$ فان قيم $\underline{\hat{\text{حـ}}}$ المناظرة لها تكون

$$\underline{\hat{\text{حـ}}} = -\underline{\hat{\text{ب}}}\,\underline{\text{م}}_{\text{ص ع}^*}\,\underline{\text{م}}^{-1}_{\text{ع}^*\text{ع}^*} \qquad (٣٥)$$

وواضح أن المصفوفة ($\underline{\text{م}}_{\text{ص ع}^*}\,\underline{\text{م}}^{-1}_{\text{ع}^*\text{ع}^*}$) هى مصفوفة معاملات محسوبة بالمربعات الصغرى كل سطر فيها يعطى معاملات انحدار أحد المتغيرات ص (المشاهدة بخطأ) على باقى المتغيرات فى المعادلة وهى المشاهدة بدون خطأ . ولذلك فعندما نعوض فى الطرف الايمن من (٣٤) عن $\underline{\text{حـ}}$ بما تساويه فانه يصبح

$$\underline{\text{ب}}\,\underline{\underline{\text{ص}}} - \underline{\text{ب}}\left(\underline{\text{م}}_{\text{ص ع}^*}\,\underline{\text{م}}^{-1}_{\text{ع}^*\text{ع}^*}\right)\underline{\underline{\text{ع}}}^{*} =$$

$$\underline{\text{ب}}\left(\underline{\underline{\text{ص}}} - \underline{\text{م}}_{\text{ص ع}^*}\,\underline{\text{م}}^{-1}_{\text{ع}^*\text{ع}^*}\,\underline{\underline{\text{ع}}}^{*}\right)$$

والمقدار بين قوسين هو فى الواقع بواقى انحدار المتغيرات $\underline{\text{ص}}$ على المتغيرات $\underline{\text{ع}}^*$. واذا رمزنا الى هذه البواقى بالرمز $\underline{\text{ف}}$ فأن المعادلة (٣٤) تؤول الى

$$\underline{\text{ب}}\;\underline{\underline{\text{ف}}} = \underline{\text{ق}} \qquad (٣٦)$$

وبهذا نعود الى موقف يماثل ذلك الذى بدأنا منه ، باعتبار أن $\underline{\text{ف}}$ هى متغيرات جديدة مشاهدة بخطأ ، ويراد تقدير معالم المعادلة (٣٦) باعتبار أن البواقى $\underline{\text{ق}}$ هى محصلة اخطاء المشاهدة فى $\underline{\underline{\text{ف}}}$. وهو نفس الفرض الذى وضعناه عند تقدير (٢٩) .

(٢) لذلك نختار متغيرات مساعدة جديدة هى المتغيرات $\underline{\text{ع}}^{**}$ ، اى متغيرات مشاهدة ، بدون خطأ ولكن تقع خارج المعادلة ، ولكى نتوصل الى حدود المحدد المناظر للمحدد

فى (٣٢) ، علينا أن نحسب مصفوفة عزوم المتغيرات الجديدة (ف بدل ص) وكذلك مصفوفة عزوم بواقى انحدارها على المتغيرات المساعدة (ع**) . وهنا نلاحظ أن :

$$\text{أ}_{\text{ف ف}} = \text{ف ف}' = (\text{ص} - \text{أ}_{\text{ص ع*}}\,\text{أ}^{-1}_{\text{ع* ع*}}\,\text{ع*})\,(\text{ص}' - \text{ع*}'\,\text{أ}^{-1}_{\text{ع* ع*}}\,\text{أ}_{\text{ع* ص}})$$

$$= \text{أ}_{\text{ص ص}} - \text{أ}_{\text{ص ع*}}\,\text{أ}^{-1}_{\text{ع* ع*}}\,\text{أ}_{\text{ع* ص}}$$

أى أن العزوم الجديدة إن هى فى الواقع الا مصفوفة عزوم بواقى انحدار المتغيرات ص على المتغيرات ع* (الموجودة فى المعادلة) محسوبة بطريقة المربعات الصغرى . ولذلك سنرمز لها بالرمز $\text{ك}^{*}_{\text{ص ص}}$ ، نظرا لاننا استخدمنا ك للدلالة على عزوم بواقى انحدار ، ونضيف العلامة (*) للدلالة على أن البواقى محسوبة من الانحدار على المتغيرات ع*.

$$\therefore\ \text{ك}^{*}_{\text{ص ص}} = \text{أ}_{\text{ص ص}} - \text{أ}_{\text{ص ع*}}\,\text{أ}^{-1}_{\text{ع* ع*}}\,\text{أ}_{\text{ع* ص}} \qquad (٣٧)$$

أما بواقى انحدار ف على ع** فهى تعنى أننا نريد أخذ بواقى انحدار ص على ع* ثم بواقى انحدار هذه البواقى على ع** . وبعبارة أخرى فاننا فى الواقع نريد بواقى انحدار ص على ع* ، ع** معا .

لذلك نعامل جميع المتغيرات المشاهدة بلا خطأ كمجموعة واحدة هى :

$$\text{ع} = \begin{bmatrix} \text{ع*} \\ \text{ع**} \end{bmatrix} \qquad (٣٨)$$

أى أن المتغيرات المساعدة فى هذه الحالة تتكون من مجموعتين : الأولى هى المتغيرات بلا خطأ داخل المعادلة والثانية هى المستخدمة من خارج المعادلة . وهذا يتطلب أن يكون عدد المتغيرات الأخيرة محققا للشرط السابق تعيينه ، وهو أن يكون عددها مساويا على الأقل لعدد المتغيرات المشاهدة بخطأ ناقصا واحد . فاذا كانت المتغيرات ع** عددها هـ ، فمعنى هذا أن

$$هـ \geqslant ف - ١ \qquad (٣٩)$$

ولذلك اذا قلنا أن عدد المتغيرات المساعدة الكلى هو ل فان ل = هـ + ق ولما كانت م = ف + ق ، فان الشرط السابق يعنى أن

$$ل \geqslant م - ١ \qquad (٣٩')$$

وهو نفس الشرط (٣٤) .

وتكون مصفوفة عزوم بواقى انحدار ف على المتغيرات ع* هى مصفوفة عزوم بواقى انحدار ص على المتغيرات ع جميعها .

$$\underline{\underline{ك}}_{ف ف} = \underline{\underline{ك}}_{ص ص} = \underline{\underline{م}}_{ص ص} - \underline{\underline{م}}_{ص ع}\ \underline{\underline{م}}^{-1}_{ع ع}\ \underline{\underline{م}}_{ع ص} \qquad (٤٠)$$

(٣) وعليه فان فى الامكان تقدير المعالم ب بحل المعادلات :

$$\left[\underline{\underline{م}}_{ف ف} - ى\ \underline{\underline{ك}}_{ف ف}\right] \underline{\underline{ب}}^{\wedge} = \underline{صفر}$$

التى تناظر (٣١) . أو اذا أردنا التعبير بدلالة ص ،

$$\left[\underline{\underline{ك}}^{*}_{ص ص} - ى\ \underline{\underline{ك}}_{ص ص}\right] \underline{\underline{ب}}^{\wedge} = \underline{صفر} \qquad (٤١)$$

ومن الممكن أن نعتبر (٤١) الصورة العامة التى تكون فيها $\underline{\underline{ك}}^{*}_{ص ص}$ هى مصفوفة العزوم $\underline{\underline{م}}_{ص ص}$ (كما فى ٣١) عندما لا توجد المتغيرات ع* . أما $\underline{\underline{ك}}_{ص ص}$ فهى مصفوفة عزوم بواقى الانحدار على جميع المتغيرات المساعدة بغض النظر عن انتماء المتغيرات ع الى المعادلة أو عدمه . وواضح أن حل (٤١) يتطلب استخدام أحد جذور المعادلة المحددية

$$\left|\underline{\underline{ك}}^{*}_{ص ص} - ى\ \underline{\underline{ك}}_{ص ص}\right| = صفر \qquad (٤٢)$$

وهى الأخرى الصورة العامة التى تكون (٣٢) حالة خاصة منها ، ويتم التقدير باستخدام أصغر الجذور ، مع اجراء الاختبارات بنفس الطريقة السابقة .

وأخيرا فان قيم المعاملات حـ^ تحسب بالتعويض فى (٣٥)

١٧ـ **مثال (٦)**

سوف نتناول فيما يلى ٣ حالات مختلفة :

(١) حالة استخدام عدد من المتغيرات المساعدة = م ـ ١ بالضبط ، وهى حالة رايرسول . وسنبرهن فيها على أن الجذر الأصغر سوف يساوى الوحدة بالضبط ، وبالتالى فان التقديرات التى نتوصل اليها بالطريقة الجديدة هى نفس التقديرات التى توصل اليها رايرسول ، ولكننا نكسب ميزة جديدة هى امكان اجراء اختبار للازدواج الخطى .

(٢) حالة عدم وجود متغيرات بلا خطأ فى المعادلة (ع*) ولكن عدد المتغيرات المساعدة أكبر من (م ـ ١)

(٣) حالة وجود متغيرات بلا خطأ فى المعادلة وزيادة عدد المتغيرات المساعدة عن (م ـ ١) ، وفى الحالتين الأخيرتين نحتاج الى ايجاد قيم الجذرين الأولين

وسوف نستخدم فى توضيح ذلك مجموعة البيانات الآتيـــة

السنة ع١	ص٠	ص١	ص٢	ع٢	ع٣
١٩٢٢	٩٨ر٦	١٠٠ر٢	٨٧ر٤	٩٨ر٠	٩٢ر٩
١٩٢٣	١٠١ر٢	١٠١ر٦	٩٧ر٦	٩٩ر١	١٤٢ر٩
١٩٢٤	١٠٢ر٤	١٠٠ر٥	٩٦ر٧	٩٩ر١	١٠٠ر٠
١٩٢٥	١٠٠ر٩	١٠٦ر٠	٩٨ر٢	٩٨ر٩	١٢٣ر٨
١٩٢٦	١٠٢ر٣	١٠٨ر٧	٩٩ر٨	١١٠ر٨	١١١ر٦
١٩٢٧	١٠١ر٥	١٠٦ر٧	١٠٠ر٥	١٠٨ر٢	١٢١ر٤
١٩٢٨	١٠١ر٦	١٠٦ر٧	١٠٣ر٢	١٠٥ر٦	١٠٧ر١
١٩٢٩	١٠١ر٦	١٠٨ر٢	١٠٧ر٨	١٠٩ر٨	١٤٢ر٩

السنة ع١	ص٠	ص١	ص٢	ع٢	ع٣
١٩٣٠	٩٩ر٨	١٠٥ر٥	٩٦ر٦	١٠٨ر٧	٩٢ر٩
١٩٣١	١٠٣ر٠	٩٥ر٦	٨٨ر٩	١٠٠ر٦	٩٧ر٦
١٩٣٢	٩٧ر٦	٨٨ر٦	٧٥ر١	٨١ر٠	٥٢ر٤
١٩٣٣	٩٧ر٢	٩١ر٠	٧٦ر٩	٦٨ر٦	٤٠ر٥
١٩٣٤	٩٧ر٣	٩٧ر٩	٨٤ر٦	٧٠ر٩	٦٤ر٣
١٩٣٥	٩٦ر٠	١٠٢ر٣	٩٠ر٦	٨١ر٤	٧٨ر٦
١٩٣٦	٩٩ر٢	١٠٢ر٢	١٠٣ر١	١٠٢ر٣	١١٤ر٣
١٩٣٧	١٠٠ر٣	١٠٢ر٥	١٠٥ر١	١٠٥ر٠	١٢١ر٤
١٩٣٨	١٠٠ر٣	٩٧ر١	٩٦ر٤	١١٠ر٥	٧٨ر٦
١٩٣٩	١٠٤ر١	٩٥ر٨	١٠٤ر٤	٩٢ر٥	١٠٩ر٥
١٩٤٠	١٠٥ر٣	٩٦ر٤	١١٠ر٧	٨٩ر٣	١٢٨ر٦
١٩٤١	١٠٧ر٦	١٠٠ر٣	١٢٧ر١	٩٣ر٠	٢٣٨ر١

وهى مجموعة من الأرقام القياسية عن الاقتصاد الأمريكى خلال الفترة ١٩٢٢ ـ ١٩٤١ للظواهر الاتيـــة :

ص٠ = استهلاك الفرد من الاغذية

ص١ = سعر الاغذية منسوبا الى أسعار سلع الاستهلاك

ص٢ = الدخل الحقيقى للفرد (أى الدخل النقدى منسوبا الى أسعار سلع الاستهلاك)

ع١ = الزمن بالسنوات

ع٢ = سعر المزرعة للسنة السابقة

ع٣ = الاستثمار الحقيقى للفرد

والجدول الاتى يلخص عزوم جميع هذه المتغيرات (حول المتوسطات الحسابية) :

	ص$_{0}$	ص$_{1}$	ص$_{2}$	ع$_{1}$	ع$_{2}$	ع$_{3}$
ص$_{0}$	٣٠٣٥					
ص$_{1}$	١٢٥٠	١١٦٦٥				
ص$_{2}$	١٠٨٠٠	١٢٣٢٢	٥٣١٨٥			
ع$_{1}$	١٤٤٥	-٥١٥٥	٨٧٣٧	١٣٣٠٠		
ع$_{2}$	٥١٥٦	١٨٤٠٦	٢٨١٤٠	-٨٣٠٥	٦١٤٣٥	
ع$_{3}$	٣٥٨٧٨	٣٧٤٠٠	١٦٧٦٠٥	١٣١٦٣	٧٩٢٧٦	٦٤٧٣٤٦

والمطلوب تقدير معالم المعادلات الآتيــــة :

(١) ص$_{0}$ دالة فى ص$_{1}$ مع استخدام ع$_{2}$ فقط كمتغير مساعد

(٢) ص$_{0}$ دالة فى ص$_{1}$ ، ع$_{1}$ مع استخدام ع$_{2}$ فقط كمتغير مساعد

(٣) ص$_{0}$ دالة فى ص$_{1}$ مع استخدام ع$_{2}$ ، ع$_{3}$ كمتغيرين مساعدين

(٤) ص$_{0}$ دالة فى ص$_{1}$ ، ع$_{1}$ مع استخدام ع$_{2}$ ، ع$_{3}$ كمتغيرين مساعدين

الحــــل

أولا : ص$_{0}$ دالة فى ص$_{1}$ وكلاهما مشاهد بخطأ ، ويؤدى ادخال ع$_{2}$ فقط كمتغير مساعــد الى أن الشرط ل = م - ١ يتحقق بالصورة التى تطلبها رايرسول وما نريد اثباتــه هنا أنه يمكن الوصول الى التقديرات التى توصل اليها رايرسول بالقواعد العامة الــــتى أثبتناها هنا .

المعلومات اللازمة لهذه المسألة هى عزوم ص$_{0}$ ، ص$_{1}$ ، ع$_{2}$ وهى من الجدول السابق :

	ص$_{0}$	ص$_{1}$	ع$_{2}$
ص$_{0}$	٣٠٣٥		
ص$_{1}$	١٢٥٠	١١٦٦٥	
ع$_{2}$	٥١٥٦	١٨٤٠٦	٦١٤٣٥

ووفقا لطريقة رايرسول يكون تقدير معامل $\text{ص}_{١}$ هو خارج قسمة عزم $\text{ص}_{٠}$ مع $\text{ع}_{٢}$ ($\text{م}_{٠٢}$) على عزم $\text{ص}_{١}$ مع $\text{ع}_{٢}$ ($\text{م}_{٢١}$)

$$\therefore\ \text{ب}_{١} = \frac{٥١٥٦}{١٨٤٠٦} = ٢٨٠١\text{ر}$$

أما وفقا للنظرية العامة فاننا نحتاج لحساب $\text{ك}_{\text{ص ص}}$ ، أى مصفوفة عزوم بواقى انحدار كل من $\text{ص}_{٠}$ ، $\text{ص}_{١}$ على $\text{ع}_{٢}$. ويمكن ترتيب الحساب كالاتى :

نبدأ بالمتغيرات المساعدة ($\text{ع}_{٢}$) ثم المتغيرات المدروسة ($\text{ص}_{٠}$ ، $\text{ص}_{١}$) . ثم نتبع خطوات الحل المستخدمة فى حساب المربعات الصغرى الى أن نتخلص من كل المتغيرات المساعدة (وهى هنا $\text{ع}_{٢}$) فنحصل على مصفوفة جديدة تناظر $\text{ص}_{٠}$ ، $\text{ص}_{١}$ هى المصفوفة المطلوبة ، وذلك كالاتى :

	$\text{ع}_{٢}$	$\text{ص}_{٠}$	$\text{ص}_{١}$	المجموع	المراجعة
$\text{ع}_{٢}$	١٤٣٥ر٦	٥١٥٦ر٠	٨٤٠٦ر١	٤٩٩٧ر٨	
$\text{ص}_{٠}$	٥١٥٦ر٠	٣٠٣٥ر٠	١٢٥٠ر٠	٩٤٤١ر٠	
$\text{ص}_{١}$	٨٤٠٦ر١	١٢٥٠ر٠	١٦٦٥ر١	١٣٢١ر٣	
$\text{ع}_{٢}$	٠٠٠٠ر١	٠٨٣٩ر٠	٢٩٩٦ر٠	٣٨٣٥ر١	٣٨٣٥ر١
$\text{ص}_{٠}$	٥١٥٦ر٠	٠٤٣٣ر	١٠٤٥ر	٧١٣٤ر٠	٧١٣٣ر٠
$\text{ص}_{١}$	٨٤٠٦ر١	١٠٤٥ر	٥٥١٤ر	٥٤٦٥ر٢	٥٤٦٥ر٢
$\text{ص}_{٠}$		٢٦٠٢ر٠	-٠٢٩٥ر٠	٢٣٠٧ر٠	٢٣٠٧ر٠
$\text{ص}_{١}$		-٠٢٩٥ر٠	٦١٥١ر٠	٥٨٥٦ر٠	٥٨٥٦ر٠

ويبدأ هذا الجدول بالشكل المعتاد فى المربعات الصغرى ، بمعنى أن أول جزء هو العزوم

بحيث تكتب عزوم المتغيرات المساعدة فى البداية . والجزء الثانى هو الذى نحصل عليه بقسمة أول سطر على أول عدد فيه ثم ضرب خارج القسمة فى الاعداد الاولى من السطور التالية . ويلى ذلك القسم الثانى الذى نحصل عليه بالطرح ، واستبعاد السطر الاول أى المتغير المساعد الاول . هذا الباقى هو فى الواقع مصفوفة عزوم بواقى انحدار المتغيرات الباقية على المتغير المساعد الاول . ولما كان هذا المثال لا يحتوى الا على متغير مساعد ، فان هذه المصفوفة هى المصفوفة ك صص المطلوبة أى تقدير عزوم الاخطاء فى المتغيرات ص .

وبالتعويض فى (٣٢) نجد أن :

م صص ـ ى ك صص =
[٣٠٣٥ر٠   ١٢٥٠ر٠]
[١٢٥٠ر   ٣٦٦٥ر١]
ـ ى
[٢٦٠٢ر   ـ٠٢٩٥ر٠]
[ـ٠٢٩٥ر   ٦١٥١ر]

=
[٣٠٣٥ر٠ ـ ٢٦٠٢ر٠ ى   ١٢٥٠ر٠ + ٠٢٩٥ر٠ ى]
[١٢٥٠ر٠ + ٠٢٩٥ر٠ ى   ١٦٦٥ر١ ـ ٦١٥١ر٠ ى]

ويكون محدد هذه المصفوفة هو

(٣٠٣٥ر٠ ـ ٢٦٠٢ر٠ ى) (١٦٦٥ر١ ـ ٦١٥١ر٠ ى) ـ (١٢٥٠ر٠ + ٠٢٩٥ر٠ ى)٢

= ٣٥٤٠ر٠ ـ ٤٩٠٢ر٠ ى + ١٦٠٠ر٠ ى٢

ـ (٠١٥٦ر٠ + ٠٠٧٤ر٠ ى + ٠٠٠٨ر٠ ى٢)

= ١٥٩٢ر٠ ى٢ ـ ٤٩٧٦ر٠ ى + ٣٣٨٤ر٠

هذه هى المعادلة المطلوب ايجاد جذريها . ويلاحظ أنه لا بد أن يكون أصغر جذريها هو الواحد الصحيح ، وهذا واضح من أنه بالتعويض عن ى = ١ فان المحدد سوف يساوى الصفر فعلا :

١٥٩٢ر٠ ـ ٤٩٧٦ر٠ + ٣٣٨٤ر٠ = ٤٩٧٦ر٠ ـ ٤٩٧٦ر٠ = صفر

أى أن ٠٠٠ر١ هو أحد الجذرين

ومن المعلوم أن الحد المطلق مقسوما على معامل ى٢ هو حاصل ضرب الجذرين أى

$$\frac{٠ر٣٣٨٤}{٠ر١٥٩٢} = ٢ر١٢٥٦$$

. ولما كان أحد الجذرين هو الواحد فان الثانى هو ٢ر١٢٥٦ . ونفس النتيجة نحصل عليها اذا حسبنا معامل ى مقسوما على معامل ى٢ أى

$$\frac{-٠ر٤٩٧٦}{٠ر١٥٩٢} = -٣ر١٢٥٦$$

إذ يكون هو القيمة السالبة لمجموع الجذرين . وبطرح الجذر الأول وهو ١ر٠٠٠٠ نجد أن الثانى هو ٢ر١٢٥٦

وبالتعويض عن ى بقيمة الجذر الاول ى١ = ١ر٠٠٠ يمكن حل المعادلة (٣١) بافتراض أن معامل ص٠ أى أ = −١ر٠٠٠٠

$$\begin{bmatrix} -١ر٠٠٠٠ & ب_٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ر٠٤٣٣ & ٠ر١٠٤٥ \\ ر١٠٤٥ & ر٥٥١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

وبعبارة أخرى فان حساب ب٢ يتطلب حل أحدى المعادلتين الاتيـــين

$$-٠ر٠٤٣٣ + ٠ر١٠٤٥\ ب_٢ = \text{صفر}$$

$$-٠ر١٠٤٥ + ٠ر٥٥١٤\ ب_٢ = \text{صفر} \quad ،$$

وكل من هاتين المعادلتين يعطى بالضرورة نفس النتيجة نظرا لانْ المحدد يساوى الصفـــر مما يعنى تناسب السطرين

$$ب_٢ = \frac{٠ر٠٤٣٣}{٠ر١٠٤٥} = \frac{٠ر١٠٤٥}{٠ر٥٥١٤} = ٠ر٢٨٠٢$$

وهذه هى نفس النتيجة التى حصلناعليها بتطبيق أسلوب رايرسول مباشرة . (فيما عدا أخطاء التقريب) .

وقد يبدو الحل هنا أطول بعض الشيء فضلا عن استلزامه معرفة جميع العزوم . ولكـــن هذا الفرق فى طول الحل يتضاءل عندما يزيد عدد المتغيرات المدروسة ، فضلا عن أننـــا اكتسبنا معرفة بالجذر الثانى ونستطيع لذلك اختبار الازدواج ، ومن جهة أخرى لايوجد لدينا سبيل للتأكد مما اذا كانت المعادلة تامة أم لا ، لانْ كون ى١ = ١ر٠٠٠ عدديا كانـــت نتيجة حتمية لاستخدامنا عددا من المتغيرات المساعدة يساوى (م − ١) لا أكثر ولا يـــدل بالضرورة على أن القيمة فى المجتمع هى فعلا ١ر٠٠٠ .

ولاجراء الاختبار نوجد

ن لو$_{هـ}$ (ك$_1$ ك$_2$) = ٢٠ لو$_{هـ}$ ٢ر١٢٥٦ = ٢٠ × ٢ر٣٠٢٦ × ٠ر٣٢٧٤

= ٤٦ر٠٥٢ × ٠ر٣٢٧٤ = ١٥ر٠٧٧

وتكون درجات الحرية هى ٢ (١ ـ ٢ + ٢) = ٢ . ولهذه الدرجات نجد أن

كا^2 = ٥ر٩٩ عند ٥ ٪ ، = ٩ر٢١ عند ١ ٪ .

ولما كانت القيمة المشاهدة أكبر من هاتين القيمتين فان هذا يعنى أن القيمة النظرية للجذر الثاني أكبر فعلا من الوحدة مما ينفى وجود علاقة ثانية تامة أى ينفى الازدواج الخطى .

أما الاختبار التقريبى فهو

ن (ك$_1$ + ك$_2$ ـ ٢) = ٢٠ (٣ر١٢٥٦ ـ ٢) = ٢٢ر٥١٢

ويشير الى نفس النتيجة .

ثانيا : ص$_0$ دالة فى ص$_1$ ، ع$_1$ ونستخدم ع$_2$ فقط كمتغير مساعد . وهذه هى الاخرى حالة تتفق مع شروط رايرسول . ولحلها بالاسلوب الجديد نرتب المتغيرات الخالية من الخطأ بحيث نبدأ بالمتغير ع$_1$ الداخل فى المعادلة ثم يليه المتغير ع$_2$ المساعد . ونستمر فى الحل حتى نتخلص من ع$_1$ ، ع$_2$ معا ، وبذلك نحصل على ك$_{صص}$. وذلك كما فى الجدول الاتى :

	$ع_1$	$ع_2$	$ص_0$	$ص_1$	المجموع	المراجعة
الأول / أ						
$ع_1$	١ر٣٣٠٠	-٠ر٨٣٠٥	٠ر١٤٤٥	-٠ر٥١٥٥	٠ر١٢٨٥	
$ع_2$	-٠ر٨٣٠٥	٦ر١٤٣٥	٠ر٥١٥٦	١ر٨٤٠٦	٧ر٦٦٩٢	
$ص_0$	٠ر١٤٤٥	٠ر٥١٥٦	٠ر٣٠٣٥	٠ر١٢٥٠	١ر٠٨٨٦	
$ص_1$	-٠ر٥١٥٥	١ر٨٤٠٦	٠ر١٢٥٠	١ر١٦٦٥	٢ر٦١٦٦	
الأول / ب						
$ع_1$	١ر٠٠٠٠	-٠ر٦٢٤٤	٠ر١٠٨٦	-٣٨٧٦	٠ر٠٩٦٦	٠ر٠٩٦٦
$ع_2$	-٠ر٨٣٠٥	٠ر٥١٨٦	-ر٠٩٠٢	٠ر٣٢١٩	-٠ر٠٨٠٢	-٠ر٠٨٠٢
$ص_0$	٠ر١٤٤٥	-٠ر٠٩٠٢	٠ر٠١٥٧	-٠ر٠٥٦٠	٠ر٠١٤٠	٠ر٠١٤٠
$ص_1$	-ر٥١٥٥	٠ر٣٢١٩	-٠ر٠٥٦٠	ر١٩٩٨	-٠ر٠٤٩٨	-٠ر٠٤٩٨
الثاني / أ						
$ع_2$		٥ر٦٢٤٩	٠ر٦٠٥٨	١ر٥١٨٧	٧ر٧٤٩٤	٧ر٧٤٩٤
$ص_0$		٠ر٦٠٥٨	٠ر٢٨٧٨	٠ر١٨١٠	١ر٠٧٤٦	١ر٠٧٤٦
$ص_1$		١ر٥١٨٧	٠ر١٨١٠	٠ر٩٦٦٧	٢ر٦٦٦٤	٢ر٦٦٦٤
الثاني / ب						
$ع_2$		١ر٠٠٠٠	٠ر١٠٧٧	٠ر٢٧٠٠	١ر٣٧٧٧	١ر٣٧٧٧
$ص_0$		٠ر٦٠٥٨	٠ر٠٦٥٢	٠ر١٦٣٦	٠ر٨٣٤٦	٠ر٨٣٤٦
$ص_1$		١ر٥١٨٧	٠ر١٦٣٦	٠ر٤١٠٠	٢ر٠٩٢٣	٢ر٠٩٢٣
الثالث / أ						
$ص_0$			٠ر٢٢٢٦	٠ر٠١٧٤	٠ر٢٤٠٠	٠ر٢٤٠٠
$ص_1$			٠ر٠١٧٤	٠ر٥٥٦٧	٠ر٥٧٤١	٠ر٥٧٤١

ونلاحظ أن هذا الجدول يعطي كافة المصفوفات المطلوبة ٠ ففي القسم الثاني / أ نجد عـــزوم بواقي انحدار المتغيرات $ع_2$ ، $ص_0$ ، $ص_1$ على المتغير $ع_1$ بينما في الثالث / أ نجـد

عزوم بواقى انحدار ص٠ ، ص١ على المتغيرين ع١ ، ع٢ معا . اذن نحصل على المصفوفتين :

ك*ص ص = [٠ر٢٨٧٨   ٠ر١٨١٠ ؛ ٠ر١٨١٠   ٠ر٩٦٦٧]   (من القسم الثانى /أ)

وكذلك ك ص ص = [٠ر٢٢٢٦   ٠ر٠١٧٤ ؛ ٠ر٠١٧٤   ٠ر٠٥٦٤]   (من القسم الثالث /أ)

وعلى ذلك فانه بالتعويض فى (٤٢) نجد أن المحدد المطلوب حساب جذوره هو

| ك*ص ص ـ ى ك ص ص | = | ٠ر٢٨٧٨ ـ ٠ر٢٢٢٦ ى   ٠ر١٨١٠ ـ ٠ر٠١٧٤ ى ؛ ٠ر١٨١٠ ـ ٠ر٠١٧٤ ى   ٠ر٩٦٦٧ ـ ٠ر٠٥٦٧ ى |

= ٠ر٢٧٨٢ ـ ٠ر٣٧٥٤ ى + ٠ر١٢٣٩ ى٢

ـ(٠ر٠٣٢٧ ـ ٠ر٠٠٦٣ ى + ٠ر٠٠٠٣ ى٢)

= ٠ر١٢٣٦ ى٢ ـ ٠ر٣٦٩١ ى + ٠ر٢٤٥٥

وبمساواة هذا المحدد بالصفر نجد أن لدينا معادلة من الدرجة الثانية أحد جذريها بالضرورة هو الواحد الصحيح ، فيكون الثانى هو ٠ر٢٤٥٥ / ٠ر١٢٣٦ = ١ر٩٨٦٢ ولاختبار الازدواج نوجد

ن لوهـ (ى١ ى٢) = ٢٠ × ٢ر٣٠٢٦ × ٠ر٢٩٨٠ = ١٣ر٧٢٣

ودرجات الحرية هى ٢ (٢ ـ ٣ + ٢) = ٢ . وهى قيمة معنوية عند كل من ٥ % ، ١ % . مما يشير الى انتفاء الازدواج الخطى .

وبالتعويض عن ى = ى١ = ١ر٠٠ فان المعادلة (٤١) تعطى (بوضع ب̂٠ = ـ ١ر٠٠)

[ـ ١ر٠٠   ب̂١] [٠ر٠٦٥٢   ٠ر١٦٣٦ ؛ ٠ر١٦٣٦   ٠ر٤١٠٠] = [صفر   صفر]

ومنها ب̂١ = ٠ر٠٦٥٢ / ٠ر١٦٣٦ = ٠ر١٦٣٦ / ٠ر٤١٠٠ = ٠ر٣٩٩٠

وباستخدام هذا التقدير نستطيع حساب تقدير معامل ع_1 فى المعادلة وهــــو $\hat{\text{حـ}}_1$ وذلك وفقا للمعادلة (٣٥) ٠ وهنا نجد أن

$$\text{ص ع}^{*\prime}\;(\text{ع}^{*\prime}\text{ع}^{*})^{-1} = \begin{bmatrix} \text{٠ر١٤٤٥} \\ \text{ـ ٠ر٥١٥٥} \end{bmatrix} \times \frac{1}{\text{١ر٣٣٠}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر١٠٨٦} \\ \text{ـ ٠ر٣٨٧٦} \end{bmatrix}$$

وتكـــون

$$\hat{\text{حـ}}_1 = -\,\hat{\text{ب}}'\;\text{ص ع}^{*\prime}\;(\text{ع}^{*\prime}\text{ع}^{*})^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} \text{ـ ١ر٠٠٠٠} & \text{٠ر٣٩٩٠} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{٠ر١٠٨٦} \\ \text{ـ ٠ر٣٨٧٦} \end{bmatrix} = \text{٠ر٢٦٣٣}$$

أى أن المعادلة هى (فيما عدا الحد المطلق)

$$\text{ص}_0 = \text{٠ر٣٩٩٠}\;\text{ص}_1 + \text{٠ر٢٦٣٣}\;\text{ع}_1 + \hat{\text{ق}}$$

<u>تمريـــن</u> : أثبت أن هذه التقديرات يمكن الحصول عليها بذاتها مباشرة باستخـــــدام طريقة رايرسول ٠

<u>ثالثـا</u> : ص_0 دالة فى ص_1 وباستخدام المتغيرين المساعدين ع_2 ، ع_3 نجد أنـــه لا يمكن الحساب بواسطة طريقة رايرسول لأنّ $\underline{\text{ل}} = \text{م}$ وليس $\text{م} - 1$ ولذلـك لابد من استخدام الأسلوب العام ونظم العمل كالآتـــى :

	ع٢	ع٣	ص٠	ص١	المجموع	المراجعة
الأول / أ						
ع٢	٦ر١٤٣٥	٧ر٩٢٧٦	٠ر٥١٥٦	١ر٨٤٠٦	١٦ر٤٢٧٣	
ع٣	٧ر٩٢٧٦	٦٤ر٧٣٤٦	٣ر٥٨٧٨	٣ر٧٤٠٠	٧٩ر٩٩٠٠	
ص٠	٠ر٥١٥٦	٣ر٥٨٧٨	٠ر٣٠٣٥	٠ر١٢٥٠	٤ر٥٣١٩	
ص١	١ر٨٤٠٦	٣ر٧٤٠٠	٠ر١٢٥٠	١ر١٦٦٥	٦ر٨٧٢١	
الأول / ب						
ع٢	١ر٠٠٠٠	١ر٢٩٠٤	٠ر٠٨٣٩	٠ر٢٩٩٦	٢ر٦٧٣٩	٢ر٦٧٣٩
ع٣	٧ر٩٢٧٦	١٠ر٢٢٩٨	ر٦٦٥١	٢ر٣٧٥١	٢١ر١٩٧٦	٢١ر١٩٧٦
ص٠	٠ر٥١٥٦	ر٦٦٥١	ر٠٤٣٣	٠ر١٠٤٥	١ر٣٧٨٥	١ر٣٧٨٧
ص١	١ر٨٤٠٦	٢ر٣٧٥١	ر١٠٤٥	ر٥٥١٤	٤ر٩٢١٦	٤ر٩٢١٦
الثاني / أ						
ع٣		٥٤ر٥٠٤٨	٢ر٩٢٢٧	١ر٣٦٤٩	٥٨ر٧٩٢٤	٥٨ر٧٩٢٤
ص٠		٢ر٩٢٢٧	٠ر٢٦٠٢	-٠ر٠٢٩٥	٣ر١٥٣٤	٣ر١٥٣٤
ص١		١ر٣٦٤٩	-٠ر٠٢٩٥	٠ر٦١٥١	١ر٩٥٠٥	١ر٩٥٠٥
الثاني / ب						
ع٣		١ر٠٠٠٠	٠ر٠٥٣٦	٠ر٠٢٥٠	١ر٠٧٨٦	١ر٠٧٨٧
ص٠		٢ر٩٢٢٧	٠ر١٥٦٧	٠ر٠٧٣١	٣ر١٥٢٥	٣ر١٥٢٤
ص١		١ر٣٦٤٩	٠ر٠٧٣١	٠ر٠٣٤١	١ر٤٧٢١	١ر٤٧٢٢
الثالث / أ						
ص٠			٠ر١٠٣٥	-٠ر١٠٢٦	٠ر٠٠٠٩	٠ر٠٠٠٩
ص١			-٠ر١٠٢٦	٠ر٥٨١٠	٠ر٤٧٨٤	٠ر٤٧٨٤

ويكون المحدد فى هذه الحالة هو :

$$\left| \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صص}} - \text{ك}\ \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} \right| = \begin{vmatrix} 0.3035 - 0.3035\,\text{ك} & 0.1250 + 0.1026\,\text{ك} \\ 0.1250 + 0.1026\,\text{ك} & 1.1665 - 0.5810\,\text{ك} \end{vmatrix}$$

$$= 0.3540 - 0.2971\,\text{ك} + 0.0601\,\text{ك}^2$$

$$- (0.0156 + 0.0257\,\text{ك} + 0.0105\,\text{ك}^2)$$

$$= 0.0496\,\text{ك}^2 - 0.3228\,\text{ك} + 0.3384$$

وباستخدام قاعدة ايجاد جذرى معادلة من الدرجة الثانية نجد أن

$$\text{ك}_1 ، \text{ك}_2 = \frac{0.3228 \pm \sqrt{(0.3228)^2 - 4 \times 0.0496 \times 0.3384}}{2 \times 0.0496}$$

$$= \frac{0.3228 \pm \sqrt{0.037061}}{0.0992} = \frac{0.3228 \pm 0.1925}{0.0992}$$

$$= \frac{0.1303}{0.0992} ، \frac{0.5153}{0.0992} = 1.3135 ، 5.1946$$

ولاختبار أصغر الجذرين نوجد

$$\text{ن}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ك}_1 = 20 \times 2.3026 \times 0.1185 = 5.457$$

ودرجات الحرية هى $(\text{ل} - \text{م} + 1) = (2 - 2 + 1) = 1$ ، وعندها $\text{كا}^2 = 3.841$ عند ٥ ٪ ، ٦٫٦٣٥ عند ١ ٪ . وهذا يعنى أن احتمال أن تكون العلاقة تامة أقل من ٥ ٪ ولكنه أكبر من ١ ٪ . ولذلك فاننا نرفض هذا الفرض عند ٥ ٪ ولو أننا نجيزه عند ١ ٪ . وطالما أن العلاقة غير تامة بهذا الشكل عند ٥ ٪ (أى أن الجذر الأصغر يزيد توقعه عن الوحدة) فانه لا خطر من الازدواج الخطى ولذلك لا نختبر الجذر الثانى .

أما اذا قبلنا الفرض على أساس ١ ٪ فاننا لابد وأن نختبر الجذر الثانى :

$$\text{ك لو} \; (\text{ك}_1 \; \text{ك}_2) = ٢٠ \times ٢ر٣٠٢٦ \times (٠ر١١٨٥ + ٠ر٧١٥٦)$$

$$= ٣٨ر٤١٢$$

ودرجات الحرية هى ٢ × ٢ = ٤ ، وعندها كا^{٢} عند ١ ٪ تبلغ ١٣ر٢٧٧ ولذلك ينتفى الازدواج الخطى •

ورغم ضآلة احتمال تمام العلاقة فان هذا لا يمنعنا من تقدير معاملاتها ، لأن التقديرات لن تكون متأثرة بالازدواج • وهنا نجد أن

$$\underline{\text{أ}}_{\text{ص ص}} - \text{ك}_1 \, \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٠ر٣٠٣٥ & ٠ر١٢٥٠ \\ ٠ر١٢٥٠ & ١ر١٦٦٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ر١٣٦٠ & -٠ر١٣٤٩ \\ -٠ر١٣٤٩ & ٠ر٧٦٣١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ر١٦٧٥ & ٠ر٢٥٩٩ \\ ٠ر٢٥٩٩ & ر٤٠٣٤ \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن

$$\hat{\text{ب}}_1 = -١ر٠٠٠ \quad , \quad \hat{\text{ب}}_2 = \frac{٠ر١٦٧٥}{٠ر٢٥٩٩} = \frac{٠ر٢٥٩٩}{ر٤٠٣٤} = ٠ر٦٤٤٤$$

<u>رابعا</u> : عند أضافة ع$_1$ الى المعادلة الاخيرة يجب اضافتها أيضا الى المتغيرات المساعدة مع البدء بها فى الجدول •

	ع١	ع٢	ع٣	ص٠	ص١	المجموع	المراجعة
أ/١							
ع١	١ر٣٣٠٠	-٠ر٨٣٠٥	١ر٣١٦٣	٠ر١٤٤٥	-٠ر٥٥١٥	١ر٤٤٤٨	
ع٢	-٠ر٨٣٠٥	٦ر١٤٣٥	٧ر٩٢٧٦	٠ر٥١٥٦	١ر٨٤٠٦	١٥ر٥٩٦٨	
ع٣	١ر٣١٦٣	٧ر٩٢٧٦	٦٤ر٧٣٤٦	٣ر٥٨٧٨	٣ر٧٤٠٠	٨١ر٣٠٦٣	
ص٠	٠ر١٤٤٥	٠ر٥١٥٦	٣ر٥٨٧٨	٠ر٣٠٣٥	٠ر١٢٥٠	٤ر٦٧٦٤	
ص١	-٠ر٥١٥٥	١ر٨٤٠٦	٣ر٧٤٠٠	٠ر١٢٥٠	١ر١٦٦٥	٦ر٣٥٦٦	
١/ب							
ع١	١ر٠٠٠٠	-٠ر٦٢٤٤	٠ر٩٨٩٧	٠ر١٠٨٦	-٠ر٣٨٧٦	١ر٠٨٦٣	١ر٠٨٦٣
ع٢	-٠ر٨٣٠٥	٠ر٥١٨٦	-٠ر٨٢١٩	-٠ر٠٩٠٢	٠ر٣٢١٩	-٠ر٩٠٢١	-٠ر٩٠٢٢
ع٣	١ر٣١٦٣	-٠ر٨٢١٩	١ر٣٠٢٧	٠ر١٤٣٠	-٠ر٥١٠٢	١ر٤٢٩٩	١ر٤٢٩٩
ص٠	٠ر١٤٤٥	-٠ر٠٩٠٢	٠ر١٤٣٠	٠ر٠١٥٧	-٠ر٠٥٦٠	٠ر١٥٧٠	٠ر١٥٧٠
ص١	-٠ر٥١٥٥	٠ر٣٢١٩	-٠ر٥١٠٢	-٠ر٠٥٦٠	٠ر١٩٩٨	-٠ر٥٦٠٠	-٠ر٥٦٠٠
أ/٢							
ع٢		٥ر٦٢٤٩	٨ر٧٤٩٥	٠ر٦٠٥٨	١ر٥١٨٧	١٦ر٤٩٨٩	١٦ر٤٩٨٩
ع٣		٨ر٧٤٩٥	٦٣ر٤٣١٩	٣ر٤٤٤٨	٤ر٢٥٠٢	٧٩ر٨٧٦٤	٧٩ر٨٧٦٤
ص٠		٠ر٦٠٥٨	٣ر٤٤٤٨	٠ر٢٨٧٨	٠ر١٨١٠	٤ر٥١٩٤	٤ر٥١٩٤
ص١		١ر٥١٨٧	٤ر٢٥٠٢	٠ر١٨١٠	٠ر٩٦٦٧	٦ر٩١٦٦	٦ر٩١٦٦
٢/ب							
ع٢		١ر٠٠٠٠	١ر٥٥٥٥	٠ر١٠٧٧	٠ر٢٧٠٠	٢ر٩٣٣٢	٢ر٩٣٣٢
ع٣		٨ر٧٤٩٥	١٣ر٦٠٩٨	٠ر٩٤٢٣	٢ر٣٦٢٣	٢٥ر٦٦٣٩	٢٥ر٦٦٣٩
ص٠		٠ر٦٠٥٨	٠ر٩٤٢٣	٠ر٠٦٥٢	٠ر١٦٣٦	١ر٧٧٦٩	١ر٧٧٦٩
ص١		١ر٥١٨٧	٢ر٣٦٢٣	٠ر١٦٣٦	٠ر٤١٠٠	٤ر٤٥٤٦	٤ر٤٥٤٦
أ/٣							
ع٣			٤٩ر٨٢٢١	٢ر٥٠٢٥	١ر٨٨٧٩	٥٤ر٢١٢٥	٥٤ر٢١٢٥
ص٠			٢ر٥٠٢٥	٠ر٢٢٢٦	٠ر٠١٧٤	٢ر٧٤٢٥	٢ر٧٤٢٥
ص١			١ر٨٨٧٩	٠ر٠١٧٤	٠ر٥٦٦٧	٢ر٤٦٢٠	٢ر٤٦٢٠
٣/ب							
ع٣			١ر٠٠٠٠	٠ر٠٥٠٢	٠ر٠٣٧٩	١ر٠٨٨١	١ر٠٨٨١
ص٠			٢ر٥٠٢٥	٠ر١٢٥٦	٠ر٠٩٤٨	٢ر٧٢٢٩	٢ر٧٢٣٠
ص١			١ر٨٨٧٩	٠ر٠٩٤٨	٠ر٠٧١٦	٢ر٠٥٤٣	٢ر٠٥٤٢
أ/٤							
ص٠				٠ر٠٩٧٠	-٠ر٠٧٧٤	٠ر٠١٩٦	٠ر٠١٩٦
ص١				-٠ر٠٧٧٤	٠ر٤٨٥١	٠ر٤٠٧٧	٠ر٤٠٧٧

وباستخدام نتائج القسمين (٢/أ) ، (٤/أ) نجد أن

$$\text{ك}^{*}_{\text{ص ص}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٢٨٧٨} & \text{٠ر١٨١٠} \\ \text{٠ر١٨١٠} & \text{٠ر٩٦٦٧} \end{bmatrix} \text{ ، } \underline{\text{ك}}_{\text{ص ص}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٠٩٧٠} & -\text{٠ر٠٧٧٤} \\ -\text{٠ر٠٧٧٤} & \text{٠ر٤٨٥١} \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك فان المعادلة المحددية هي

$$(\text{٠ر٢٨٧٨} - \text{٠ر٠٩٧٠ د})\ (\text{٠ر٩٦٦٧} - \text{٠ر٤٨٥١ د}) - (\text{٠ر١٨١٠} + \text{٠ر٠٧٧٤ د})^{٢}$$

$$= (\text{٠ر٢٧٨٢} - \text{٠ر٢٣٣٤ د} + \text{٠ر٠٤٧١ د}^{٢}) - (\text{٠ر٠٣٢٨} + \text{٠ر٠٢٨٠ د} + \text{٠ر٠٠٦٠ د}^{٢})$$

$$= \text{٠ر٠٤١١ د}^{٢} - \text{٠ر٢٦١٤ د} + \text{٠ر٢٤٥٤} = \text{صفر}$$

وجذرا هذه المعادلة هما ١ر١٤٤٨ ، ٥ر٢١٥٣

ولاختبار اكتمال العلاقة نوجد

$$\text{ن لو}_{\text{هـ}}\ \text{د}_{١} = \text{٢٠} \times \text{٢ر٣٠٢٦} \times \text{٠ر٠٥٨٧} = \text{٢ر٧٠٣٣}$$

ودرجات الحرية هي (٣ ـ ٣ + ١) = ١ ، ولذلك فان القيمة المشاهدة غير معنوية عند ٥٪ مما يشير الى أنه لا يوجد ما يدعو لرفض الفرض أن توقع $\text{د}_{١}$ هو ١ر٠٠٠ أى أن العلاقة تامة .
لذلك نختبر $\text{د}_{٢}$ بواسطة

$$\text{ن لو}\ (\text{د}_{١}\ \text{د}_{٢}) = \text{٢٠} \times \text{٢ر٣٠٢٦} \times (\text{٠ر٠٥٨٧} + \text{٠ر٧١٧٢}) = \text{٣٥ر٧٣٢}$$

ودرجات الحرية هي ٢ × ٢ = ٤ ، أى أننا نرفض كون الجذر الثانى توقعه ١ر٠٠٠ أى نرفض وجود علاقة أخرى تامة ، أو الازدواج الخطى .

ولذلك نطمئن الى استخدام الجذر الأول لتقدير العلاقة المطلوبة وهذا يعطى :

$$\underline{\text{ك}}^{*}_{\text{ص ص}} - \text{د}_{١}\ \underline{\text{ك}}_{\text{ص ص}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٢٨٧٨} & \text{٠ر١٨١٠} \\ \text{٠ر١٨١٠} & \text{٠ر٩٦٦٧} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{٠ر١١١٠} & -\text{٠ر٠٨٨٦} \\ -\text{٠ر٠٨٨٦} & \text{٠ر٥٥٥٣} \end{bmatrix}$$

ولتقدير المعالم :

$$\begin{bmatrix} \text{٠ر١٧٦٨} & \text{٠ر٢٦٩٦} \\ \text{٠ر٢٦٩٦} & \text{٠ر٤١١٤} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{١ر٠٠٠} \\ \hat{\text{ب}}_{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{صفر} \\ \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \hat{\text{ب}}_2 = \frac{0.1768}{0.2696} = \frac{0.2696}{0.4114} = 0.6555$$

وباستخدام قيمة $\underline{أ}_{\text{ص}\,\text{ع}^*}\ \underline{\text{ك}}^{-1}_{\text{ع}^*\text{ع}^*}$ السابق حسابها

$$\hat{\text{ح}}_1 = \bar{\ } - \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.6555 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1086 \\ -0.3876 \end{bmatrix} = 0.3622$$

فتكون المعادلة هى

$$\text{ص}_0 = 0.6555\ \text{ص}_1 + 0.3622\ \text{ع}_1 + \hat{\text{ق}}$$

١٨ــ <u>ملاحظات على الحل</u> :

عند أيجاد المصفوفات $\underline{م}_{\text{ص}\text{ص}}$ ، $\underline{\text{ك}}^*_{\text{ص}\text{ص}}$ ، $\underline{\text{ك}}_{\text{ص}\text{ص}}$ يجب أن نلاحظ أن كل هــذه المصفوفات هى فى الواقع مصفوفات عزوم . ومعنى هذا أن الاعداد الواقعة على أقطارهــا الرئيسية ($م_{ii}$ أو ك_{ii}) هى فى الواقع <u>مجاميع مربعات</u> ولذلك <u>فهى موجبة بالضرورة</u> . أما الاعداد الخارجة عن القطر فهى تمثل التغايرات ولذلك فهى اما موجبة أو سالبة وفقا لنــوع العلاقة بين المتغيرين المناظرين .

كذلك ، نظرا لأن المصفوفة ($\underline{م}_{\text{ص}\text{ص}} - \text{ى}\ \underline{\text{ك}}_{\text{ص}\text{ص}}$) أو ($\underline{\text{ك}}^*_{\text{ص}\text{ص}} - \text{ى}\ \underline{\text{ك}}_{\text{ص}\text{ص}}$) تمثل عزوم الأجزاء الحقيقية النظرية فان قطرها لابد هو الاخر أن يكون موجبا وان جاز أن تكــون الاعداد غير القطرية موجبة أو سالبة . هذا بالرغم من أن الجذر ى يكون دائما مساويا للوحدة أو أكبر منها .

ويوضح المثال الأخير كيف يتأثر الناتج بنوع المتغيرات المساعدة المستخدمة مما يؤثر فى قيم المعاملات المحسوبة . فمن المعلوم أن المصفوفة $\underline{\text{ك}}_{\text{ص}\text{ص}}$ تمثل تقديرا لمصفوفة تباينــات وتغايرات الأخطاء ، وقد وجدنا أن هذا التقدير كان كالآتى للمتغيرين ص_0 ، ص_1 :

$$\underline{\text{ك}}_{\text{ص}\text{ص}} = \begin{bmatrix} 0.2602 & -0.0295 \\ -.0295 & 0.6151 \end{bmatrix}$$ عند استخدام ع_2 متغير مساعد

، =	ر٢٢٢٦	٠ر٠١٧٤	عند استخدام ع١ ، ع٢ مساعدين
	ر٠١٧٤	٠ر٠٥٥٦٧	

، =	٠ر١٠٣٥	ـ٠ر١٠٢٦	عند استخدام ع٢ ، ع٣ مساعدين
	ـ٠ر١٠٢٦	٠ر٥٨١٠	

، =	٠٩٧٠	ـ٠ر٠٧٧٤	عند استخدام ع١ ، ع٢ ، ع٣ مساعدة
	ـر٢٧٤	٠ر٤٨٥١	

وواضح أن ادخال متغيرات أضافية يساهم فى صغر التباينات ويترتب عليه فى نفس الوقت تغير فى أشارة التغاير ، ولذلك فمن الخطورة الاعتماد على عدد محدود من المتغيرات المساعدة كما اقترح رايرسول اذا كانت المتغيرات المساعدة المستبعدة لها أثر فعال فى تغيير شكل مصفوفة تباينات الاخطاء ، هذا الى أن رايرسول لم يحاول علاج الحالة التى فيها عدد المتغيرات المساعدة يزيد عن عدد المتغيرات المدروسة مما يعنى أن تصويره الفعلى لمصفوفة تباينات الاخطاء لا يكون بالضرورة تاما .

على أن ضرب المصفوفة كـ ص ص فى الجذر ى يأخذ فى الحسبان أى أخطاء أخرى فى المعادلة عدا خطأ المشاهدة ، وعلى الاخص خطأ تقدير هذا الاخير . ففى الحالتين أولا وثالثا نجد أن التقدير النهائى لمصفوفة تباينات الاخطاء التى يحقق فرض اكتمال العلاقة هو ى كـ ص ص ، وهو فى الحالتين على التوالى

٠ر٢٦٠٢	ـ ٠ر٠٢٩٥	،	٠ر١٣٦٠	ـ ٠ر١٣٤٩	
ـ٠ر٠٢٩٥	٠ر٦١٥١		ـ٠ر١٣٤٩	٠ر٧٦٣١	

وباعتبار أن الاعداد القطرية هى تقديرات لتباينات الاخطاء ، فانها بالضرورة تكون أقل من تباينات المتغيرات الاصلية ، وهى فى الواقع تمثل كثافة الخطأ وفقا لتعريف فريش ، فكثافة الخطأ فى ص٠ هى ى١ك٠٠ / م٠٠ = ٠ر٢٦٠٢ / ٠ر٣٠٣٥ = ٠ر٨٥٧ أو ٠ر١٣٦٠ / ٠ر٣٠٣٥ = ٠ر٤٤٨

كذلك نجد أن كثافة الخطأ في $\text{ص}_{٢}$ هي $\frac{\text{٠ر٦١٥١}}{\text{١ر١٦٦٥}} = \text{٠ر٥٢٧}$ أو $\frac{\text{٠ر٧٦٣١}}{\text{١ر١٦٦٥}} = \text{٠ر٦٥٤}$

فاذا كنا نعتبر أن الحالة (ثالثا) تعطى تقديرا مناسبا لكثافات الخطأ لاتضح لنا أن المتغير التابع نظريا كثافة الخطأ فيه حوالى ٠ر٤٥ بينما المتبوع كثافته ٠ر٦٥ وهذا يظهر خطورة الاعتماد على المربعات الصغرى باعتبار $\text{ص}_{١}$ خال من الخطأ وتركيز الخطأ كله فى ص ٠ ومن جهة اخرى فأن افتراض أن الخطأ موزع بنفس الكثافة ، كما هو الحال فى الانحدار القطرى مع اعتبار الاخطاء مستقلة عن بعضها هو الاخر فرض تعسفى لا يعطى بالضرورة أفضل النتائج ٠

ولذلك فأن الاسلوب الذى ينتهجه بعض الكتاب من حيث الاطمئنان الى انتفاء الازدواج الخطى ثم محاولة تطبيق المربعات الصغرى باعتبار الخطأ مركز فى متغير نختاره على اساس اقتصادى بحت هو الاخر اسلوب خاطىء ، ولا يعتمد عليه فى تقدير المعادلات الهيكلية والحالة الوحيدة التى يصح فيها الاعتماد على المربعات الصغرى (بعد الاطمئنان الى انتفاء الازدواج الخطى) هى الحالة التى نريد فيها استخدام المعادلة للتنبؤ بقيمة المتغير الذى نعامله كمتغير تابع ٠

وأخيرا يجب أن نلاحظ أن الحل الحسابى يمكن أن يأخذ شكلا مختلفا بعض الشىء لو أننا علمنا مقدما مقلوب مصفوفة المتغيرات المساعدة (أو قمنا بحسابه مباشرة) لنفرض مثلا أننا قمنا بحساب مقلوب المصفوفة لعزوم جميع المتغيرات $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ ، $\text{ع}_{٣}$ فكانت كالاتى :

$$\left(\underline{\underline{\text{ع}}}'\,\text{ع}\right)^{-١} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٨٩٨٤} & \text{٠ر١٧٢٢} & -\text{٠ر٠٣٩٤} \\ \text{٠ر١٧٢٢} & \text{٠ر٢٢٦٣} & -\text{٠ر٠٣١٢} \\ -\text{٠ر٠٣٩٤} & -\text{٠ر٠٣١٢} & \text{٠ر٠٢٠١} \end{bmatrix}$$

فمن الممكن استخدام هذا المقلوب مباشرة لايجاد $\underline{\underline{\text{ك}}}$ ص ص وفقا لتعريفها (٣٠)

ولذلك نوجد حاصل الضرب

$$\underline{م}_{\text{صع}}\ \underline{م}^{-1}_{\text{عع}} = \begin{bmatrix} 0.1445 & 0.5156 & 3.5878 \\ -0.5155 & 1.8406 & 3.7400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8984 & -0.1722 & -0.0394 \\ 0.1722 & 0.2263 & -0.0312 \\ -0.0394 & -0.0312 & 0.0201 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0771 & 0.0295 & 0.0502 \\ -0.2933 & 0.2110 & 0.0380 \end{bmatrix}$$

ثم نضرب هذا الناتج من اليسار فى $\underline{م}_{\text{عص}}$ فنحصل على حاصل الضـرب

$$\underline{م}_{\text{صع}}\ \underline{م}^{-1}_{\text{عع}}\ \underline{م}_{\text{عص}} = \begin{bmatrix} 0.0771 & 0.0295 & 0.0502 \\ -0.2933 & 0.2110 & 0.0380 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1445 & -0.5155 \\ 0.5156 & 1.8406 \\ 3.5878 & 3.7400 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2065 & 0.2025 \\ 0.2025 & 0.6814 \end{bmatrix}$$

وبطرح هذه المصفوفة من $\underline{م}_{\text{صص}}$ $= \begin{bmatrix} 0.3035 & 0.1250 \\ 0.1250 & 1.1665 \end{bmatrix}$

نحصل على المصفوفة $\underline{\underline{ك}}_{\text{صص}}$ التى حصلنا عليها من قبل ٠

كذلك عند حساب $\underline{\underline{ك}}^{*}_{\text{صص}}$ نستطيع اتباع نفس الخطوات مع ملاحظة أنه على أى الحالات لا بد من حساب مقلوب المصفوفة $\underline{م}_{\text{ع}^{*}\text{ع}^{*}}$ لكى نوجد $\underline{\hat{ح}}$ ، أو نقوم بحساب معاملات انحـــدار المتغيرات $\underline{ع}^{*}$ مباشرة ٠ والمثال الآتى يوضح ذلك :

لنفرض انه فى المثال السابق يراد تقدير معالم معادلة تفسر ص بدلالة كل من $ص_{١}$ ، $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$

وهنا نجد أن المتغير المساعد الاضافى هو $ع_{٣}$ فقط ، وهنا يكون الجذر الاصفر ١ر٠٠ بالضرورة وتكون $\underline{\underline{ك}}_{\text{صص}}$ هى التى أوجدناها من قبل كبواقى انحدار على جميع المتغيرات ع ٠ أما $ع^{*}$ فمصفوفة عزومهـــا :

م ع*ع* =

$$\begin{bmatrix} ٠ر٨٣٠٥ - & ١ر٣٣٠٠ \\ ٦ر١٤٣٥ & -٠ر٨٣٠٥ \end{bmatrix}$$

ويمكن حساب مقلوبها بالطريقة العادية فيكون :

م ع*ع* $^{-1}$ =

$$\begin{bmatrix} ٠ر١١١٠ & ٠ر٨٢١٢ \\ ٠ر١٧٧٨ & ٠ر١١١٠ \end{bmatrix}$$

∴ م صع* م ع*ع* $^{-1}$ =

$$\begin{bmatrix} ٠ر١١١٠ & ٠ر٨٢١٢ \\ ٠ر١٧٧٨ & ٠ر١١١٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ر٥١٥٦ & ر١٤٤٥ \\ ١ر٨٤٠٦ & -ر٥١٥٥ \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} ٠ر١٠٧٧ & ٠ر١٧٥٩ \\ ٠ر٢٧٠٠ & -٠ر٢١٩٠ \end{bmatrix}$$

∴ م صع* م ع*ع* $^{-1}$ م ع*ص =

$$\begin{bmatrix} ٠ر٥١٥٦ & ٠ر١٤٤٥ \\ ١ر٨٤٠٦ & -٠ر٥١٥٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ر١٠٧٧ & ٠ر١٧٥٩ \\ ٠ر٢٧٠٠ & -٠ر٢١٩٠ \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} ٠ر١٠٧٦ & ٠ر٠٨٠٩ \\ ٠ر٦٠٩٨ & ٠ر١٠٧٦ \end{bmatrix}$$

وبالطرح من م صص نحصل على

ك* صص =

$$\begin{bmatrix} ٠ر٠١٧٤ & ٠ر٢٢٢٦ \\ ٠ر٥٥٦٧ & ر٠١٧٤ \end{bmatrix}$$

وهى نفس القيمة الموجودة فى جدول المثال (رابعا) قسم (٣/أ) ٠ ونظرا لان ءِ $_{١}$ = ١
فأن :

$$\underset{=}{\text{ك}}^{*}_{\text{صص}} = \underset{=}{\text{ك}}^{-1}_{\text{صص}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٠٩٤٨} & \text{٠ر١٢٥٦} \\ \text{٠ر٠٧١٦} & \text{٠ر٠٩٤٨} \end{bmatrix}$$

ومنها $\hat{\text{ب}}_{1} = -\text{١ر٠٠٠٠}$ ، $\hat{\text{ب}}_{2} = \text{١ر٣٢٤٥}$

$$\therefore \; \underset{-}{\hat{\text{ح}}} = -\begin{bmatrix} -\text{١ر٠٠٠} & \text{١ر٣٢٤٥} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{٠ر١٠٧٧} & \text{٠ر١٧٥٩} \\ \text{٠ر٢٧٠٠} & -\text{٠ر٢١٩٠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{٠ر٢٤٩٩} & \text{٠ر٤٦٦٠} \end{bmatrix}$$

فتكون المعادلة (عدا الحد المطلق) هـــى :

$$\text{ص}_{0} = \text{١ر٣٢٤٥}\,\text{ص}_{1} + \text{٠ر٤٦٦٠}\,\text{ع}_{1} - \text{٠ر٢٤٩٩}\,\text{ع}_{2} + \hat{\text{ق}}$$

فاذا تركنا مشكلة التقدير الاحصائى جانبا وحاولنا تفسير النتائج التى حصلنا عليها تفسيرا اقتصاديا فأننا سوف نجد أن معامل ص_{1} وأن اختلفت قيمته يأخذ دائما اشارة موجبة مما يعنى أن الاستهلاك يزيد مع ارتفاع السعر . وهذا عكس ما نتوقعه نظريا . ولذلك نتساءل : هــل معنى هذا أن نظرية الطلب لا تنطبق على هذه الحالة بالذات ؟ أم أنها خاطئة ؟ أو أن هناك عوامل أخرى اهملناها وكان يجب أخذها فى الحسبان ؟

الواقع أن النظرية تشير الى وجود عوامل أخرى تؤثر فى الطلب بجانب السعر أهمها الدخــل وبالرغم من أن اختبارات الجذر الاول لم تشر الى نقص فى العلاقة الا انه لا يجب ان نعتبرهــا دليلا على كمال العلاقة . فكما كررنا مرارا من قبل ، لا يوجد أى اختبار احصائى يؤكد صحــة فرض معين ، لان الاختبارات قادرة فقط على نفى الفروض أو اجازتها لعدم وجود دليـــــل قوى ضدها .

لذلك فمن الخطر أن نجعل التحليل الاحصائى يتحمل تبعة استنتاج عدم صحة نظريــة معينة لعدم وجود ما ينهض ضد نظرية بديلة . فضلا عن ذلك فأن التأكيد بأن اشارة معامــل ما موجبه أو سالبة أمر يتطلب اجراء اختبارات معنوية للتقديرات ونحن لم نتعرض بعد لهــذه المشكلـــة .

ولاظهار هذه الحقيقة نعود الى نفس المثال ونعتبر أن الاستهلاك كان دالة فى السعــر

والزمن وكذلك الدخل ، وبذلك يبقى لنا فقط متغيران مساعدان يكفيان للتقدير ، ولن نجد مشكلة فى الحساب لان $\text{ى}_{١} = \text{١ر٠٠٠}$ ، وباستخدام $\text{م}^{-١}_{\text{ع ع}}$ نستطيع حســـاب $\text{كَ}_{\text{ص ص}}$:

$$\text{كَ}_{\text{ص ص}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٨٦٨} & -\text{٠ر٧٧٤} & \text{٠ر٩٧٠} \\ \text{٢ر٥٩١} & \text{٤ر٨٥١} & -\text{٠ر٧٧٤} \\ \text{٤ر٤٨٦} & \text{٢ر٥٩١} & \text{٠ر٨٦٨} \end{bmatrix}$$

وتكون عزوم بواقى الانحدار على $\text{ع}^{*} = \text{ع}_{١}$ هـــى :

$$\text{كَ}^{*}_{\text{ص ص}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٩٨٥١} & \text{٠ر١٨١٠} & \text{٠ر٢٨٧٨} \\ \text{١ر٥٧٠٨} & \text{٠ر٩٦٦٧} & \text{٠ر١٨١٠} \\ \text{٤ر٧٤٤٥} & \text{١ر٥٧٠٨} & \text{٠ر٩٨٥١} \end{bmatrix}$$

ونظرا لان $\text{ى}_{١} = \text{١ر٠٠٠}$ فاننا نوجد باقى الطرح مباشرة $(\text{كَ}^{*}_{\text{ص ص}} - \text{كَ}_{\text{ص ص}})$

$$\therefore (\text{كَ}^{*}_{\text{ص ص}} - \text{كَ}_{\text{ص ص}})\,\underline{\text{ث}}' = \begin{bmatrix} \text{٠ر٨٩٨٣} & \text{٠ر٢٥٨٤} & \text{٠ر١٩٠٨} \\ \text{١ر٣١١٧} & \text{٠ر٤٨١٦} & \text{٠ر٢٥٨٤} \\ \text{٤ر٢٩٥٩} & \text{١ر٣١١٧} & \text{٠ر٨٩٨٣} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{١ر٠} \\ \text{ث}_{١} \\ \text{ث}_{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{صفر} \\ \text{صفر} \\ \text{صفر} \end{bmatrix}$$

أى أن لدينا ٣ معادلات لتحديد المجهولين $\text{ث}_{١}$ ، $\text{ث}_{٢}$:

$$-\text{٠ر١٩٠٨} + \text{٠ر٢٥٨٤}\ \text{ث}_{١} + \text{٠ر٨٩٨٣}\ \text{ث}_{٢} = \text{صفر}$$

$$-\text{٠ر٢٥٨٤} + \text{٠ر٤٨١٦}\ \text{ث}_{١} + \text{١ر٣١١٧}\ \text{ث}_{٢} = \text{صفر}$$

$$-\text{٠ر٨٩٨٣} + \text{١ر٣١١٧}\ \text{ث}_{١} + \text{٤ر٢٩٥٩}\ \text{ث}_{٢} = \text{صفر}$$

ونظرا لان المحدد = صفر ، فاننا نستطيع حل أى معادلتين مع ضمان أن الحل يحقـــق فعلا المعادلة الثالثة . ولذلك نستطيع أن نهمل المعادلة الاولى مثلا ونحل المعادلتـين الثانية والثالثـــة :

	ب١	ب٢	ب٠	المجمـــوع
ب١	٠ر٤٨١٦	١ر٣١١٧	٠ر٢٥٨٤	٢ر٠٥١٧
ب٢	١ر٣١١٧	٤ر٢٩٥٩	٠ر٨٩٨٣	٦ر٥٠٥٩
ب١	١ر٠٠٠٠	٢ر٧٢٣٦	٠ر٥٣٦٥	٤ر٢٦٠١
ب٢	١ر٣١١٧	٣ر٥٧٢٦	٠ر٧٠٣٨	٥ر٥٨٨١
ب٢		٠ر٧٢٣٣	٠ر١٩٤٥	٠ر٩١٧٨
ب٢		١ر٠٠٠٠	٠ر٢٦٨٩	١ر٢٦٨٩
ب٢		٢ر٧٢٣٦	ر٧٣٢٤	٣ر٤٥٦٠
ب١	١ر٠٠٠٠		ــ ر١٩٥٩	٠ر٨٠٤١

أى أن ب̂١ = ــ ٠ر١٩٥٩ ، ب̂٢ = ٠ر٢٦٨٩

وهاتين القيمتين أقرب الى المتوقع نظريا اذ أن السعر أثره عكسى بينما الدخل اثره طردى. وهذا يبين أن أهمال الدخل من المعادلة أدى الى خطأ فى تقدير معامل السعر وهذا الخطأ أكبر فى أثره من خطأ التقدير الراجع الى عدم استخدام الطرق المناسبة للتقدير. أما حـ̂١ فتحسب كالمعتاد.

وفى هذه الحالة يجب أيضا أن نختبر الازدواج الخطى مما يستلزم حساب ى٢. لذلك نحسب قيمة المحدد | ك* ص ص ــ ى ك ص ص | ونساويه بالصفر فنحصل على معادلة من الدرجة الثالثة هى :

٠ر٧٦٦٠ ــ ٠ر١٤٢٨٩ ى + ٠ر٠٧١١٠ ى٢ ــ ٠ر٠٠٤٧٨ ى٣ = صفر

ويمكن أعادة كتابتها كالاتى (بالقسمة على ــ ٠ر٠٠٤٧٨)

ى٣ ــ ١٤ر٨٧٥ ى٢ + ٢٩ر٨٩٣ ى ــ ١٦ر٠٢٥ = صفر

وبما أننا نعلم أن أحد الجذور الثلاثة هو الواحد الصحيح ، وبافتراض أن الجذرين الاخرين هما ب ، ح فأن هذه المعادلة يمكن تحليلها الى :

(ى ـ ١) (ى ـ ب) (ى ـ ح) = صفر

أى ى^{٣} ـ (ب + ح + ١) ى^{٢} + (ب + ح + ب ح) ى ـ ب ح = صفر

وبالمقارنة يتضح أن حاصل ضرب الجذرين هو ب ح = ١٦ر٠٢٥

وأن مجموعهما مضافا اليه واحد هو ب + ح + ١ = ١٤ر٨٧٥

فيكون المجموع هو ١٣ر٨٧٥ . ويلاحظ أن معامل ى هو مجموع حاصل الضرب والمجموع

= ١٦ر٠٢٥ + ١٣ر٨٧٥ = ٢٩ر٩٠٠ = تقريبا ٢٩ر٨٩٣

لذلك علينا أن نحسب جذرى المعادلة من الدرجة الثانية

(ى ـ ب) (ى ـ ح) = ى^{٢} ـ (ب + ح) ى + ب ح = صفر

∴ ى^{٢} ـ ١٣ر٨٧٥ ى + ١٦ر٠٢٥ = صفر

وجذرا هذه المعادلة هما الجذران الثانى والثالث للمعادلة الاصلية

ى$_{٢}$ ، ى$_{٣}$ = $\dfrac{١٣ر٨٧٥ \pm \sqrt{١٢٨ر٤١٥}}{٢}$

= ١ر٢٧١٥ ، ١٢ر٦٠٣٥

ولاختبار الجذر الثانى نوجد

ن لو$_{هـ}$(ى$_{١}$ ى$_{٢}$) = ٢٠ × ٢ر٣٠٢٦ × ٠ر١٠٤٣ = ٦ر٣١٢

ودرجات الحرية هى ٢ . وهذه القيمة معنوية عند ٥٪ فقط . أى أن هناك احتمال أكبر قليلا من ١ ٪ لوجود الازدواج الخطى . ولعل منشأ هذه الظاهرة وجود علاقة قوية بين الزمن والدخل خلال هذه الفترة المدروسة .

١٩ - العلاقة بين الطرق المختلفـــه

رأينا أن طريقة فريش تعتمد أساسا على استخدام المربعات الصغرى عددا من المـــرات وينتهى بها الامر الى الانحدار القطرى الذى لا يخرج عن كونه متوسطا لتقديرات محسوبـــة بالمربعات الصغـرى ٠

أما الطرق الاخرى فتحتاج الى معلومات اضافيه لا تكون متاحه عند استخدام المربعـــات الصغرى أو الانحدار القطرى ٠ وتدور هذه المعلومات حول وسائل تقدير أخطاء المشاهدات وعزومها ٠ أو وسائل التخلص من تلك الاخطاء ٠ ففى طريقة الانحدار المرجح تقدر مصفوفة عزوم الاخطاء إما تقديرا مستقلا عن البيانات المستخدمة فى التقدير - بمعنى أن الباحث يخمـــن القيم التى يعتقد أنها تمثل كثافات الخطأ بالرجوع الى الظروف التى أحاطت جمع البيانات دون أن يستخدم هذه الاخيره نفسها فى هذا التقدير - أو أن يقوم باستخدام البيانات فى التقدير ثم يعتبر القيم التى توصل اليها قيما محسوبه خارج عملية التقدير الاحصائى ٠ الامر الذى يضعف من قيمة التقدير الذى يحصل عليه رغم أنه فى النهاية يتعادل مع التقديرات التى نتوصل اليهـــا عندما نأخذ هذه الصفه فى الاعتبـــار ٠

أما نظرية رايرسول فانها تدخل المتغيرات المساعده بصوره ينتظر لها أن تصل بنا الـــى تقدير عزوم الاجزاء الحقيقيه وتتخلص من عزوم الاخطاء ومع ذلك فقد عجز ذلك الكاتب عن مواجهـــة الموقف مواجهة كاملة مما اضطره الى الحصول على أكثر من تقدير واحد فعاد بذلك الى نفـــس الموقف الذى واجهه فريـــش ٠

لذلك فان النظريه العامه للمتغيرات المساعده تمتاز بأنها أخذت بالفكره الاساسيه الـــتى بنى عليها رايرسول نظريته ٠ ولكنها استطاعت أن تحدد بدقه الدور الذى تلعبه تلك المتغيرات وتبين الكيفيه التى يمكن بها اجراء تقدير سليم لمصفوفه عزوم الاخطاء باستخدام البيانات ذاتها ثم ربط عمليه التقدير هذه بعملية تقدير معالم المعادله ذاتها فانتهى بها الوضع الى موقـــف يشابه نظرية الانحدار المرجح وان امتازت عن هذه الاخيره بأنها ربطت بين جميع التقديـــرات بصورة واضحه كما أنها تخلصت من الشرط التعسفى الذى ينص على أن الاخطاء هى بالضـــرورة انحرافات عن دوال زمنيـــه ٠

وعلى ذلك نستطيع أن نستخلص أن النظريه العامة للمتغيرات المساعده قد استحقت هـذه التسميه من حيث أنها تشتمل على ما عداها كحالات خاصــه :

(١) فهي أعم من نظريه رايرسول لانها تعالج أى عدد من المتغيرات المساعده بما في ذلـك الحاله التي فيها ل = م - ١ وهي التي استطاع رايرسول أن يحسب فيهـا تقديراته ، والحاله التي فيها ل = م وهي التي بدأ بها رايرسول فوصلت به الـى أكثر من تقدير عجز عن الربط بينها فاكتفى بالتأكيد أن التقدير الحقيقي واقع بينها . الـى جانب ذلك فقد أمكن التوصل الى اختبارات للتعرف على مدى اكتمال العلاقة عند مـا ل = م (أو أكبر منها) وكذلك على وجود الازدواج الخطى حتى اذا كانـت ل = م - ١ .

ومن جهة أخرى فقد رأينا في الامثله الاخيره أنه عندما يكون ل = م - ١ فان مـن الممكن استخدام اسلوب الحل العام مع وضع ك ١ = ٠٠ر١ دون أن تكون هذه القيمـة دليلا على اكتمال العلاقه ، وانما هي نتيجه رياضيه لكون رتبة المصفوفه المستخدمه فـي التقدير هي بالضرورة م - ١ .

(٢) وهي أعم من نظرية الانحدار المرجح من حيث أنها ربطت عمليتي التقدير : تقديـر المعاملات وتقدير عزوم الاخطاء في اطار واحد ، واستطاعت لذلك أن تأخذ أثر كل منهما على الآخر في الحسبان ، وترتب على ذلك أن الجذر الاصغر لم يعد في الامكان أن يقل عن الواحد الصحيح . ومن جهة أخرى فانها تعالج مباشرة الحالة التي فيها الاخطـاء غير مستقله عن بعضها البعض وهو ما كان جائزا نظريا في الانحدار المرجح ولكن كان مـن الصعب تحقيقه عمليا والا أمكن أن نحصل على موقف فيه تقدير عزوم الاخطاء - باعتبـاره مستمدا من مصادر خارجيه - متضارب مع عزوم المشاهدات مما قد يجعل الجذر الاصغر سالبا مما يشير الى أن الفرق بين عزوم المشاهدات وعزوم الاخطاء لا يعتبر مصفوفة عـزوم للأجزاء الحقيقيه لانها تكون بذلك مصفوفة فيها بعض التباينات (للمتغيرات أو بواقـي انحدارها) سالبة. وأخيرا فإن عدم تحديد المتغيرات المساعده بأنها متغيرات زمنيـه يمكننا من معالجة حالات المشاهدات غير الزمنية ، وهي حالة يمكن معالجتها بالانحدار المرجح نظريا ومن ذلك عجز أصحاب تلك النظريه عن معالجتها عمليا لاعتمادهم على الدوال الزمنية فقـط .

وسوف نحاول فيما يلى أن نثبت تكافؤ نظرية رايرسول مع النظرية العامة فى الحالة التى فيها ل = م ــ ١ ، كما سنحاول بيان صحة النتيجة التى توصل اليها تنتنر والتى تجعل من الممكن تقدير معاملات المتغيرات المشاهدة بخطأ وبلا خطأ دفعة واحدة .

لنبدأ من المعادلة

$$\underline{\text{ص}}_{0} = \underline{\text{ب}}\,\underline{\underline{\text{ص}}} + \underline{\text{ح}}\,\underline{\underline{\text{ع}}}^{*} + \underline{\text{ق}} \qquad (٤٣)$$

حيث استبعدنا المتغير التابع ص۰ من باقى المتغيرات المشاهدة بخطأ والتى رمزنا لها بالرمز ص ومعاملاتها بالرمز ب . وهذا يختلف بعض الشيء عن المعالجة السابقة لأن ص كانت تدرج ضمن المتغيرات ص وبالتالى معاملها ــ ١٫٠ ضمن المعاملات ب . واذا اعتبرنا س هى كل المتغيرات المتبوعة ص ، ع* ورمزنا الى معاملاتها بالرمز أ لتشمل كلا من ب ، حـ فان المعادلة تكون :

$$\underline{\text{ص}}_{0} = \underline{\text{أ}}\,\underline{\underline{\text{س}}} + \underline{\text{ق}} \qquad (٤٤)$$

فاذا كانت لدينا المتغيرات المساعدة ع (المشتملة على ع*) فاننا نحسب مصفوفة بواقى الانحدار عليها $\underline{\underline{\text{ك}}}$ ، مما يعنى أن الفرق $\underline{\underline{\text{ح}}}$ بينها وبين العزوم الأصلية $\underline{\underline{\text{م}}}$ هو تقدير لعزوم الأجزاء الحقيقية ، وهذا ينطبق على المتغيرات $\underline{\underline{\text{ص}}}$ وكذلك $\underline{\text{ص}}_{0}$

$$\begin{bmatrix} \text{م}_{00} & \underline{\text{م}}_{0\text{ص}} \\ \underline{\text{م}}_{\text{ص}0} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صص}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{ك}_{00} & \underline{\text{ك}}_{0\text{ص}} \\ \underline{\text{ك}}_{\text{ص}0} & \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ح}_{00} & \underline{\text{ح}}_{0\text{ص}} \\ \underline{\text{ح}}_{\text{ص}0} & \underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{صص}} \end{bmatrix}$$

لاحظ أن هذه المصفوفات تناظر $\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صص}}$ ، $\underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}}$ ، $\underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{صص}}$ لو كنا قد أدرجنا ص۰

$$\text{ح}_{00} = \underline{\text{م}}_{0\text{ع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عع}}^{-1}\,\underline{\text{م}}_{\text{ع}0} \quad ، \quad \underline{\text{ح}}_{0\text{ص}} = \underline{\text{م}}_{0\text{ع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عع}}^{-1}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عص}}$$

$$\underline{\text{ح}}_{\text{ص}0} = \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عع}}^{-1}\,\underline{\text{م}}_{\text{ع}0} \quad ، \quad \underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{صص}} = \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عع}}^{-1}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عص}}$$

وبالتالى فان ك هى بواقى طرح هذه الصفوفات من م ٠

ولكن ما معنى أن المتغيرات ع* خالية من الخطأ ؟ معناه أن المصفوفة $\text{ك}_{\text{ع*ع*}}$ اذا حسبت فسوف تساوى الصفر ، وهذا يتحقق لو أخذنا ع محتوية على ع* ، لأنَّ انحدار أى متغير على نفسه انحدار كامل لا يترك أى باق ٠ ولذلك فان ح سوف تكون هى نفسها م فى هذه الحالة ٠ كذلك بما أن تغايرات الأجزاء الحقيقية من ص ، ع* معناها طرح تغاير أخطاء ص مع ع* نفسها من عزوم ص مع ع* فان التغايرات أيضا تساوى العزوم ٠ لذلك فعندما نقول أن مجموع حواصل ضرب عزوم الأجزاء الحقيقية فى المعاملات يساوى الصفر فان هذا يعنى أننا نفترض أن المعادلة تامة وأن أخذ عزوم الأخطاء فى الحسبان قد أزال كل مصادر الاختلاف التى أدت الى ظهور ق ٠

ولكن نظرا لوجود أخطاء فى تقدير عزوم الأخطاء وبالتالى الأجزاء الحقيقية الى جانب احتمال وجود خطأ فى المعادلة ذاتها (أى أنها غير كاملة) فانه يتحتم علينا أن نحسب ما يناظر عزوم الأجزاء الحقيقية بضرب ك فى الجذر ى قبل الطرح من العزوم وبذلك فان معادلات التقدير هى فى الواقع :

$$\begin{bmatrix} (\text{م}_{\text{صص}} - \text{ى}\,\text{ك}_{\text{صص}}) & \text{م}_{\text{صع*}} \\ \text{م}_{\text{ع*ص}} & \text{م}_{\text{ع*ع*}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب}' \\ \text{حـ}' \end{bmatrix} = \text{صفر}' \qquad (٤٥)$$

أو اذا فصلنا المتغير $\text{ص}_{\text{٠}}$ عن باقى المتغيرات ص ، فان هذه المعادلات يعاد كتابتها كالاتى :

$$\begin{bmatrix} (\text{م}_{\text{٠٠}} - \text{ى}\,\text{ك}_{\text{٠٠}}) & (\text{م}_{\text{٠ص}} - \text{ى}\,\text{ك}_{\text{٠ص}}) & \text{م}_{\text{٠ع*}} \\ (\text{م}_{\text{ص٠}} - \text{ى}\,\text{ك}_{\text{ص٠}}) & (\text{م}_{\text{صص}} - \text{ى}\,\text{ك}_{\text{صص}}) & \text{م}_{\text{صع*}} \\ \text{م}_{\text{ع*٠}} & \text{م}_{\text{ع*ص}} & \text{م}_{\text{ع*ع*}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ \\ \text{ب}' \\ \text{حـ}' \end{bmatrix} = \text{صفر}' \qquad (٤٥')$$

ويتطلب حل (٤٥) أن يكون محدد المصفوفة يساوى الصفر ، ولكن المحدد هو

$$\left|\underline{أ}_{ع^*ع^*}\right| \times \left|\left(\underline{أ}_{صص} - ى\,\underline{ك}_{صص}\right) - \underline{أ}_{صع^*}\,\underline{أ}^{-1}_{ع^*ع^*}\,\underline{أ}_{ع^*ص}\right| = \text{صفر}$$

وبما أن محدد $\underline{أ}_{ع^*ع^*}$ لا يساوى الصفر ، وباعتبار أن :

$$\underline{ح}^*_{صص} = \underline{أ}_{صع^*}\,\underline{أ}^{-1}_{ع^*ع^*}\,\underline{أ}_{ع^*ص}$$

ومنها
$$\underline{ك}^*_{صص} = \underline{أ}_{صص} - \underline{ح}^*_{صص}$$

فان الشرط اللازم لحل المعادلة (٤٥) هو أن

$$\left|\underline{ك}^*_{صص} - ى\,\underline{ك}_{صص}\right| = \text{صفر}$$

وهو نفس الشرط السابق الحصول عليه . ولذلك فاننا نأخذ أصغر جذور هذه المعادلة المحددية . ونعوض به فى (٤٥′) ، وبأهمال أولى معادلات (٤٥′) فاننا نحصل على ($م - ١$) من المعادلات لتقدير المعاملات $\underline{ب}$ ، $\underline{ح}$:

$$\begin{bmatrix} \left(\underline{أ}_{ص.} - ى_1\,\underline{ك}_{ص.}\right) & \left(\underline{أ}_{صص} - ى_1\,\underline{ك}_{صص}\right) & \underline{أ}_{صع^*} \\ \underline{أ}_{ع^*.} & \underline{أ}_{ع^*ص} & \underline{أ}_{ع^*ع^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.0 \\ \underline{ب}' \\ \underline{ح}' \end{bmatrix} = \underline{\text{صفر}}'$$

وهذه يمكن أعادة كتابتها كالاتى :

$$\begin{bmatrix} \left(\underline{أ}_{صص} - ى_1\,\underline{ك}_{صص}\right) & \underline{أ}_{صع^*} \\ \underline{أ}_{ع^*ص} & \underline{أ}_{ع^*ع^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{ب}' \\ \underline{ح}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{أ}_{ص.} - ى_1\,\underline{ك}_{ص.} \\ \underline{أ}_{ع^*.} \end{bmatrix} \qquad (٤٦)$$

فاذا أوجدنا مقلوب المصفوفة اليمنى استطعنا أن نضربه فى الموجه بالطرف الأيسر للحصول على التقديرات المطلوبة . ونلاحظ أن وضع

$$\underline{ح}' = -\,\underline{أ}^{-1}_{ع^*ع^*}\,\underline{أ}_{ع^*ص}\,\underline{ب}'$$

بأخذ كل المتغيرات ص ومعاملاتها ، أو اذا أخذنا ص قاصرة على المتغيرات المتبوعة وأفردنا ص. بمفردها :

$$\hat{\underline{ح}} = - \underline{\underline{م}}^{-1}_{ع^*ع^*} \left[\underline{م}_{ع^*.} \quad \underline{\underline{م}}_{ع^*ص} \right] \begin{bmatrix} -١ ، ٠ \\ \hat{\underline{ب}}' \end{bmatrix}$$

$$= + \underline{\underline{م}}^{-1}_{ع^*ع^*} \underline{م}_{ع^*.} - \underline{\underline{م}}^{-1}_{ع^*ع^*} \underline{\underline{م}}_{ع^*ص} \hat{\underline{ب}}' \qquad (٤٧)$$

فان هذا يعتبر حلا جزئيا للمعادلة (٤٦) لأن الجزء الثانى منها يعطى

$$\underline{\underline{م}}_{ع^*ص} \hat{\underline{ب}}' + \underline{\underline{م}}_{ع^*ع^*} \hat{\underline{ح}}' = \underline{\underline{م}}_{ع^*ص} \hat{\underline{ب}}' + \left[\underline{م}_{ع^*.} - \underline{\underline{م}}_{ع^*ص} \hat{\underline{ب}}' \right]$$

$$= \underline{م}_{ع^*.}$$

وهو يساوى الطرف الأيسر فعلا .

ولذلك نستطيع التعويض فى الجزء الأول من (٤٦) أيضا ، فنحصل على :

$$\left(\underline{\underline{م}}_{صص} - ک_١ \underline{\underline{ك}}_{صص} \right) \hat{\underline{ب}}' + \underline{\underline{م}}_{صع^*} \hat{\underline{ح}}' =$$

$$\left(\underline{\underline{م}}_{صص} - ک_١ \underline{\underline{ك}}_{صص} \right) \hat{\underline{ب}}' + \left[\underline{\underline{م}}_{صع^*} \underline{\underline{م}}^{-1}_{ع^*ع^*} \underline{م}_{ع^*.} - \underline{\underline{م}}_{صع^*} \underline{\underline{م}}^{-1}_{ع^*ع^*} \underline{\underline{م}}_{ع^*ص} \hat{\underline{ب}}' \right]$$

$$= \left(\underline{\underline{م}}_{صص} - ک_١ \underline{\underline{ك}}_{صص} \right) \hat{\underline{ب}}' + \left[\underline{ح}^*_{ص.} - \underline{\underline{ح}}^*_{صص} \hat{\underline{ب}}' \right]$$

$$= \left(\underline{\underline{ك}}^*_{صص} - ک_١ \underline{\underline{ك}}_{صص} \right) \hat{\underline{ب}}' + \underline{ح}^*_{ص.}$$

وبمساواة هذا بالطرف الأيسر ($\underline{م}_{ص.} - ک_١ \underline{ك}_{ص.}$) نجد أن

$$\left(\underline{\underline{\text{ك}}}^{*}_{\text{صص}} - \text{ك}_{1}\, \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} \right) \underline{\text{ب}}^{/} + \underline{\text{ح}}^{*}_{\text{ص.}} = \underline{\text{أ}}_{\text{ص.}} - \text{ك}_{1}\, \underline{\text{ك}}_{\text{ص.}}$$

$$\therefore \left(\underline{\underline{\text{ك}}}^{*}_{\text{صص}} - \text{ك}_{1}\, \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} \right) \underline{\text{ب}}^{/} = \left(\underline{\text{ك}}^{*}_{\text{ص.}} - \text{ك}_{1}\, \underline{\text{ك}}_{\text{ص.}} \right) \qquad (٤٨)$$

وهى نفس النتيجة التى توصلنا اليها من قبل .

نستنتج من ذلك أن الصورة (٤٥) التى تناظر الصورة التى اقترحها تتنر هى فى الواقع نفس معادلات التقدير التى توصلنا اليها مباشرة ، وهى تظهر بجلاء الدور الذى تلعبه المتغيرات المساعدة فى التوصل الى العزوم الخاصة بالأجزاء الحقيقية للمتغيرات المشاهدة بخطأ .

ولبيان الصلة بين هذه التقديرات وتقديرات رايرسول نكتب $\text{ك}_{1} = 1$ ولذلك فان :

$$\underline{\underline{\text{أ}}}_{\text{صص}} - \text{ك}_{1}\, \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} = \underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{صص}}$$

$$\underline{\text{أ}}_{\text{ص.}} - \text{ك}_{1}\, \underline{\text{ك}}_{\text{ص.}} = \underline{\text{ح}}_{\text{ص.}} \quad ،$$

كذلك نظرا لأن عزوم المتغيرات ع^{*} هى عزوم الأجزاء الحقيقية لها (لعدم احتوائها على خطأ ، فاننا نستطيع كتابة :

$$\underline{\underline{\text{أ}}}_{\text{ع}^{*}\text{ص}} = \underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{ع}^{*}\text{ص}} \quad ، \quad \underline{\underline{\text{أ}}}_{\text{ع}^{*}\text{ع}^{*}} = \underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{ع}^{*}\text{ع}^{*}}$$

أى أن المعادلة (٤٦) تصبح فى هذه الحالــــة :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{صص}} & \underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{صع}^{*}} \\ \underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{ع}^{*}\text{ص}} & \underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{ع}^{*}\text{ع}^{*}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\text{ب}}^{/} \\ \underline{\text{جـ}}^{/} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\text{ح}}_{\text{ص.}} \\ \underline{\text{ح}}_{\text{ع}^{*}\text{.}} \end{bmatrix} \qquad (٤٩)$$

أو بالتعبير عن المتغيرات المتبوعة بالرمز س ومعاملاتها بالرمز أ فان

$$\underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{سس}}\, \underline{\text{أ}}^{/} = \underline{\text{ح}}_{\text{س.}} \qquad (٥٠)$$

ومنها $$\underline{\hat{\text{أ}}}' = \underline{\underline{\text{ح}}}^{-1}_{\text{سس}}\,\underline{\text{ح}}_{\text{س}\,.} \qquad (٥١)$$

ولكن : $$\underline{\text{ح}}_{\text{س}\,.} = \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{سع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{عع}}\,\underline{\text{م}}_{\text{ع}\,.}$$

، $$\underline{\underline{\text{ح}}}_{\text{سس}} = \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{سع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{عع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عس}}$$

ونظرا لأن $\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{سع}}$ مربعة فاننا نستطيع ايجاد مقلوبها (باعتبارها لا صفرية المحدد)

$$\therefore\ \underline{\underline{\text{ح}}}^{-1}_{\text{سس}} = \underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{عس}}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{سع}}$$

وبالتالى

$$\underline{\hat{\text{أ}}}' = \left(\underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{عس}}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{عع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{سع}}\right)\cdot\left(\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{سع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{عع}}\,\underline{\text{م}}_{\text{ع}\,.}\right)$$

$$= \underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{عس}}\,\underline{\text{م}}_{\text{ع}\,.}$$

أ ، $$\underline{\hat{\text{أ}}} = \underline{\text{م}}'_{.\,\text{ع}}\,\underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{سع}} \qquad (٥١')$$

وهى نفس معادلات رايرسول التى كنا نحصل عليها بضرب (٤٤) فى اليسار من المصفوفة $\underline{\underline{\text{ع}}}'$ أى المتغيرات المساعدة . ويلاحظ أن هذه النتيجة تشمل الحالتين : الحالة التى فيها جميع المتغيرات المتبوعة س تحتوى على خطأ ، وكذلك الحالة التى فيها بعض هذه المتغيرات بلا خطأ ولكنه يدرج ضمن المتغيرات المساعدة .

٢٠- تقدير التباينات :

يختلف التقدير الاحصائى عن الحساب الرياضى فى أن الأول عرضة للخطأ ، ومصدر الخطأ هو وجود متغيرات عشوائية لا تتوفر لدينا معلومات كاملة عنها ، ولذلك نعتبرها عينة مسحوبة من مجتمع لها صفات فرضية مناسبة تأخذ شكل صفات لتوزيعها . ولذلك يجب أن نجرى تقديرا لهذه الأخطاء فى التقدير تعتمد بطبيعة الحال على الفروض التى نضعها

للانحرافات الموجودة فى الصيغة الأساسية للمعادلة . هذا التقدير يأخذ فى الأساس شكل تباينات لتلك التقديرات أى مقاييس لتشتت القيم التى يأخذها التقدير فى عينات تماثل العينة التى لدينا .

وواضح أن التقديرات التى نتوصل اليها هى : تقديرات المعالم $\underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{حـ}}$ وتقديرات البواقى فى المعادلة $\underline{\text{ق}}$ ، ومن محصلة هذه التقديرات تتعين تقديرات المتغير التابع $\underline{\text{ص}}_{\circ}$. لذلك فاننا نحتاج الى دراسة تباينات تقديرات البواقى وكذلك تقديرات المعالم ، ولنبدأ بالبواقى فنلاحظ من (٤٤) أن تقديرنا لها هو :

$$\underline{\hat{\text{ق}}} = \underline{\text{ص}}_{\circ} - \underline{\hat{\text{أ}}}\,\underline{\underline{\text{س}}}$$

وتوقع هذه التقديرات هو الصفر ، ولذلك فان حساب تباينها يتطلب حساب مجموع مربعاتها :

$$\text{مح}\ \underline{\hat{\text{ق}}}^{2} = \underline{\hat{\text{ق}}}\ \underline{\hat{\text{ق}}}' = (\underline{\text{ص}}_{\circ} - \underline{\hat{\text{أ}}}\,\underline{\underline{\text{س}}})\ (\underline{\text{ص}}_{\circ}' - \underline{\underline{\text{س}}}'\,\underline{\hat{\text{أ}}}')$$

$$= (1 \quad -\underline{\hat{\text{أ}}}) \begin{bmatrix} \underline{\text{ص}}_{\circ} \\ \underline{\underline{\text{س}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\text{ص}}_{\circ}' & \underline{\underline{\text{س}}}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{\hat{\text{أ}}}' \end{bmatrix}$$

$$= (1 \quad -\underline{\hat{\text{أ}}}) \begin{bmatrix} \text{م}_{\circ\circ} & \underline{\text{م}}_{\circ\text{س}} \\ \underline{\text{م}}_{\text{س}\circ} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{سس}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{\hat{\text{أ}}}' \end{bmatrix} \qquad (٥٢)$$

أى أن

$$\text{مح}\ \underline{\hat{\text{ق}}}^{2} = \text{م}_{\circ\circ} - ٢\,\underline{\hat{\text{أ}}}\,\underline{\text{م}}_{\text{س}\circ} + \underline{\hat{\text{أ}}}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{سس}}\,\underline{\hat{\text{أ}}}' \qquad (٥٢')$$

ولو أن التقديرات كانت كما فى حالة المربعات الصغرى هى $\underline{\text{م}}_{\circ\text{س}}\,\underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{سس}}$ لأمكننا أن نختصر المعادلة الأخيرة الى $(\text{م}_{\circ\circ} - \underline{\hat{\text{أ}}}\,\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{سس}}\,\underline{\hat{\text{أ}}}') = (\text{م}_{\circ\circ} - \underline{\text{م}}_{\circ\text{س}}\,\underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{سس}}\,\underline{\text{م}}_{\text{س}\circ})$

ولكن هذا الاختصار غير جائز هنا لأن معادلات تقدير $\underline{\text{أ}}$ تختلف عن ذلك .
وبعبارة أخرى فان تقدير مربعات البواقى هو فى الأساس نفس التقدير الذى استخدمناه فـــى المربعات الصغرى من حيث الشكل ولكنه يختلف عنه فى المضمون .

فاذا كتبنا المتغيرات س والمعاملات $\hat{\text{أ}}$ بالتفصيل كما فى (٤٥′) لوجدنـــا أن

$$\text{مح}\ \hat{\text{ق}}^{\text{٢}} = \begin{bmatrix} -\text{٠ر١} & \hat{\underline{\text{ب}}} & \hat{\underline{\text{ح}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{٠٠}} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{٠ص}} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{٠ع*}} \\ \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ص٠}} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صص}} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صع*}} \\ \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ع*٠}} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ع*ص}} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ع*ع*}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{٠ر١} \\ \hat{\underline{\text{ب}}}' \\ \hat{\underline{\text{ح}}}' \end{bmatrix}$$

وبالمقارنة بالمعادلة (٤٥′) يتضح لنا أن :

$$\text{مح}\ \hat{\text{ق}}^{\text{٢}} = \text{ك}_{\text{١}} \times \begin{bmatrix} -\text{٠ر١} & \hat{\underline{\text{ب}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{٠٠}} & \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{٠ص}} \\ \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{ص٠}} & \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{٠ر١} \\ \hat{\underline{\text{ب}}}' \end{bmatrix}$$

وبعبارة أخرى اذا اعتبرنا أن ص تمثل جميع المتغيرات المشاهدة بخطأ وبالتالـــى $\hat{\underline{\text{ب}}}$ معاملاتها بما فى ذلك $-\text{٠ر١}$ وهو معامل $\text{ص}_{\text{٠}}$ فان :

$$\text{مح}\ \hat{\text{ق}}^{\text{٢}} = \text{ك}_{\text{١}}\ (\ \hat{\underline{\text{ب}}}\ \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}}\ \hat{\underline{\text{ب}}}'\ )$$

$$= \hat{\underline{\text{ب}}}\ \underline{\underline{\text{ك}}}^{*}_{\text{صص}}\ \hat{\underline{\text{ب}}}' \qquad (\text{٥٣})$$

نظرا لأن $\hat{\underline{\text{ب}}}\ (\ \underline{\underline{\text{ك}}}^{*}_{\text{صص}} - \text{ك}_{\text{١}}\underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}}\ ) = \underline{\text{صفر}}$

أى أن $\hat{\underline{\text{ب}}}\ \underline{\underline{\text{ك}}}^{*}_{\text{صص}} = \text{ك}_{\text{١}} \times \hat{\underline{\text{ب}}}\ \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}}$

وبالتالى يتساوى حاصل ضرب كل منهما فى $\hat{\underline{\text{ب}}}'$ كما فى (٥٣) . فاذا كانت $\text{ك}_{\text{١}} = \text{١}$ فان مجموع المربعات يكون هو المجموع المرجح لمربعات الأخطاء فى المتغيرات مقدرا مباشرة عن

طريق $\underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}}$ ، أما اذا كانت ك_1 أكبر من الوحدة فاننا نصحح هذا المجموع بالضرب ~~فى~~ الجذر لأن الخطأ فى المعادلة يكون أكبر نوعا من ذلك المجموع ، وكلما زاد هذا الخطأ زاد ك_1 ، وهذا هو السبب فى أننا نأخذ أصغر الجذور ونتوقع أن تكون قيمته هى الوحدة •

ولحساب تقدير تباين البواقى نقسم على عدد درجات الحرية ، وهنا تثور مشكلة تقدير هذا العدد ، والمتبع عادة هو استخدام (ن ـ م) كما فى حالة المربعات الصغرى ، ولو أن تحديد العدد الفعلى أكثر تعقيدا ، وقد يكون أقل من ذلك •

$$\therefore\ \hat{\text{ى}} = \frac{1}{\text{ن} - \text{م}} \left(\text{ك}_1 \times \hat{\underline{\text{ب}}}\ \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}}\ \hat{\underline{\text{ب}}}' \right) \qquad (٥٤)$$

ولتقدير مصفوفة تباين <u>تقديرات المعاملات</u> نلاحظ أنه عند ايجاد مثل هذه المصفوفة فى حالة المربعات الصغرى ضربنا تقدير تباين البواقى فى مقلوب المصفوفة المستخدمة فى تقدير المعاملات والمناظرة لعزوم المتغيرات المتبوعة • وقد توصل تنتنر ومن قبله كوبمانز الى نتيجة مماثلة حيث يحسب المقلوب للمصفوفة المستخدمة فى هذه الحالة ، والتى تظهر فى الطرف الأيمن من (٤٦) •

وعلى ذلك فانه اذا عرفنا قيمة ك_1 كان علينا أن نوجد مقلوب تلك المصفوفة لحساب المعاملات ثم مصفوفة التباين

$$\hat{\underline{\underline{\text{تبا}}}}\left(\hat{\underline{\text{أ}}}\right) = \hat{\underline{\underline{\text{تبا}}}}\left(\hat{\underline{\text{ب}}}\ ،\ \hat{\underline{\text{ح}}}\right) = \hat{\text{ى}} \begin{bmatrix} \left(\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صص}} - \text{ك}_1 \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} \right) & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صع}^*} \\ \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ع}^*\text{ص}} & \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ع}^*\text{ع}^*} \end{bmatrix}^{-1} \qquad (٥٥)$$

ومن جهة أخرى اذا أردنا تجزئة الحساب كما كان الحال بالنسبة لحساب المعامـــلات نفسها فاننا نوجد تباين $\hat{\underline{\text{ب}}}$ أولا وهـــو

$$\underline{\underline{\text{تبا}}}\left(\hat{\underline{\text{ب}}}\right) = \hat{\text{ى}} \left[\left(\underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صص}} - \text{ك}_{1} \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} \right) - \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صع*}} \underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{ع*ع*}} \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{ع*ص}} \right]^{-1}$$

$$= \hat{\text{ى}} \left(\underline{\underline{\text{ك}}}^{*}_{\text{صص}} - \text{ك}_{1} \underline{\underline{\text{ك}}}_{\text{صص}} \right)^{-1} = \underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{صص}} \quad \text{مثلا} \qquad (٥٦)$$

أى أن مصفوفة التباين تحسب بضرب مقلوب المصفوفة اللازمة لتقدير $\hat{\underline{\text{ب}}}$ فـــى (٤٨) فى التباين $\hat{\text{ى}}$. وتكون مصفوفة التباين الكاملة هى

$$\underline{\underline{\text{تبا}}}\left(\hat{\text{أ}}\right) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{صص}} & \underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{صع*}} \\ \underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{ع*ص}} & \underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{ع*ع*}} \end{bmatrix} \qquad (٥٧)$$

حيث :

$$\underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{صع*}} = -\underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{صص}} \underline{\underline{\text{م}}}_{\text{صع*}} \underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{ع*ع*}} = \underline{\underline{\text{ف}}}'_{\text{ع*ص}}$$

$$، \quad \underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{ع*ع*}} = \hat{\text{ى}} \underline{\underline{\text{م}}}^{-1}_{\text{ع*ع*}} + \underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{ع*ص}} \underline{\underline{\text{ف}}}^{-1}_{\text{صص}} \underline{\underline{\text{ف}}}_{\text{صع*}}$$

وبذلك تتلخص خطوات العمل فى الاتـــى :

(١) نحسب الجذر $ك_١$ ونعوض به فى (٤٦) أو (٤٨) لايجاد تقديرات المعاملات .

(٢) اذا استخدمنا (٤٦) فاننا نحسب المقلوب الموجود فى (٥٥) .

(٣) نوجد قيمة $\hat{ى}$ بالتعويض فى (٥٤) ثم نضربه فى ذلك المقلوب .

(٤) اما اذا استخدمنا (٤٨) فاننا نحصل على $\hat{ب}$ أولا ومنها $\hat{ى}$ كما سبق ثم $ف_{ص ص}$.

(٥) بالتعويض فى (٤٧) نوجد $\hat{ح}$.

(٦) بالتعويض فى (٥٧) نحصل على مصفوفة التباين المطلوبة .

هذه التقديرات هى فى الواقع تقديرات تقريبية وتصح عندما تكون ن كبيرة ، ولكن يعيبها انهـا لا تأخذ فى الاعتبار أخطاء تقدير $ك_١$ من العينة ، كما هو الحال فى الواقع ولذلك فأن آندرسـون يقترح ادخال التعديل الاتى عند حساب $ف_{ص ص}$ على أن يتم حساب باقى حدود المصفوفة بنفس الاسلوب المحدد فى (٥٧) :

$$ف_{ص ص} = \hat{ى} \left[(ك^*_{ص ص} - ك_{ص ص}) - \frac{ك_١ (ك_١ - ١)}{\hat{ى}} ل_{ص ص} \right]^{-١} \qquad (٥٨)$$

حيث $ل_{ص ص}$ هى مصفوفة نحصل عليها بضرب العمود $(\hat{ب}\ ك_{ص ص})$ فى السطـــــــر $(\hat{ب}\ ك_{ص ص})$ حيث ص تشمل جميع المتغيرات التى بها خطأ بما فيها $ص_٠$. ثم نستبعد من حاصل الضرب السطر الاول والعمود الاول وهما المناظرين للمتغير $ص_٠$ نظرا لان مصفوفة التباين تقتصر على معاملات المتغيرات عدا $ص_٠$.

بقيت حالة ل = م ـ ١ وهى التى تناظر نظرية راير سول . فى هذه الحالة لن تختلـــــف الطريقتان السابقتان لان وضع $ك_١ = ١$ يجعل $ك_١ - ١ =$ صفر وبذلك تكون $ف_{ص ص}$ فى الحالتين هـــى :

$$ف_{ص ص} = \hat{ى} \left(ك^*_{ص ص} - ك_{ص ص} \right)^{-١} \qquad (٥٩)$$

ثم نستكمل (٥٧) كما سبق . وبعبارة أخرى فأننا اذا استخدمنا المقلوب

$$\begin{bmatrix} ج_{ص ص} & م_{ص ع}^* \\ م_{ع ص}^* & م_{ع ع}^* \end{bmatrix}^{-١}$$

لحساب المعاملات فاننا نضرب هذا المقلوب فى $\hat{ى}$ تماما كما فعلنا فى المربعات الصغرى كذلك لو اننا استخدمنا اسلوب رايرسول بحساب المقلوب $\underline{\underline{م}}^{-1}_{ع س}$ كما فى (٥١) فاننا نحصل على تقدير التباين المطلوب بالتعويض فى :

$$تبا\,(\hat{\underline{أ}}) = \hat{ى}\,(\underline{\underline{م}}^{-1}_{ع س}\ \ \underline{\underline{م}}_{ع ع}\ \ \underline{\underline{م}}^{-1}_{س ع}) \qquad (٦٠)$$

حيث $\hat{ى}$ تقدر باستخدام مجموع مربعات البواقى المحسوب من (٥٢) .

ويوضح المثال الاتى طرق الحساب للحالات المختلفة :

مثال (٧) : اذا فرض أن عزوم المتغيرين المساعدين $ع_١$ ، $ع_٢$ فى المثال (٣) كانت

$$\underline{\underline{م}}_{ع ع} = \begin{bmatrix} & ١٥١٦٨ \\ ٤٣٦٩ & ٤٩١٧ \end{bmatrix}$$

فأوجد تقدير المعالم وتقدير التباينات وفقا للنظرية العامة وقارن النتائج بما تحصل عليه باستخدام طريقة رايرسول .

(١) نقسم هذه العزوم على ١٠٠٠٠ كما فعلنا بالنسبة لباقى العزوم ، فيكون مقلوب هذه المصفوفة :

$$\underline{\underline{م}}^{-1}_{ع ع} = \begin{bmatrix} ٠٫٤٩١٧ & ١٫٥١٦٨ \\ ٠٫٤٣٦٩ & ٠٫٤٩١٧ \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -١٫١٦٨٣ & ١٫٠٣٨١ \\ ٣٫٦٠٣٦ & -١٫١٦٨٣ \end{bmatrix}$$

(٢) ثم نوجد حاصل الضرب :

$$\underline{\underline{م}}_{ص ع}\ \underline{\underline{م}}^{-1}_{ع ع} = \begin{bmatrix} ٠٫٧٢١٠ & -٠٫٢٣٨٠ \\ ٠٫٥٠٠٠ & ١٫٢٥٠٠ \\ ٠٫٢٢٥٥ & ٠٫٢٦٨٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١٫١٦٨٣ & ١٫٠٣٨١ \\ ٣٫٦٠٣٦ & -١٫١٦٨٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.0894 & 2.8763 \\ 0.7135 & 0.3414 \\ 0.0148 & 0.4995 \end{bmatrix}$$

(٣) وبضرب هذه المصفوفة فى م ع ص =

$$\begin{bmatrix} -0.2380 & 1.2500 & 0.2680 \\ 0.7210 & 0.5000 & 0.2255 \end{bmatrix}$$

نحصل على :

ح ص ص = م ص ع م ع ع $^{-1}$ م ع ص =

$$\begin{bmatrix} 2.3331 & 0.0765 & 0.3567 \\ 0.0765 & 1.0625 & 0.2682 \\ 0.3567 & 0.2682 & 0.1166 \end{bmatrix}$$

(٤) وباستخدام السطرين الاخيرين نستطيع التعويض فى (٥١) وذلك بايجاد :

ح $^{-1}$ س س =

$$\begin{bmatrix} 1.0625 & 0.2682 \\ 0.2682 & 0.1166 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.2440 & -5.1615 \\ -5.1615 & 20.4499 \end{bmatrix}$$

(٥) فيكون تقدير المعاملات هـــو :

$$\begin{bmatrix} \hat{ب}_1 \\ \hat{ب}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2440 & -5.1615 \\ -5.1615 & 20.4499 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0765 \\ 0.3567 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6694 \\ 6.8994 \end{bmatrix}$$

وهى نفس النتيجة التى توصلنا اليها من قبل ، فيما عدا أخطاء التقريب .

(٦) ولحساب تباين البواقى نوجـد :

ك ص ص = م ص ص − ح ص ص =

$$\begin{bmatrix} 0.9069 & -0.3501 & 0.0878 \\ -0.3501 & 0.5000 & 0.0400 \\ 0.0878 & 0.0400 & 0.0240 \end{bmatrix}$$

ثم نضربها من اليمين واليسار فى موجة المعا ملات

$$\begin{bmatrix} -\text{١ر٠٠٠٠} & -\text{١ر٦٦٩٤} & \text{٦ر٨٩٩٤} \end{bmatrix}$$

نحصل على مجموع مربعات البواقى :

$$\text{مح } \text{ق}^{٢} = \text{٠ر١٤١٠}$$

وتكون $\hat{\text{ى}}$ بالواحدات التى يقاس بها تباين ص. هى (باعتبار ن = ٢٠)

$$\hat{\text{ى}} = \frac{\text{٠ر١٤١٠}}{\text{٢٠} - \text{٣}} = \frac{\text{٠ر١٤١٠}}{\text{١٧}} = \text{٠ر٠٠٨٢٩٤}$$

ونظرا لان تباين ص. كان مقسوما على ١٠٠٠٠ فاننا نضرب هذا التقدير فى نفس العدد لنحصل على تباين البواقى بالوحدات الاصلية : ٨٢ر٩٤

(٧) ولحساب مصفوفة تباين التقديرين $\hat{\text{ب}}_{١}$، $\hat{\text{ب}}_{٢}$ نضرب $\hat{\text{ى}}$ بالوحدات المعدلة فى $\underline{\text{ح}}^{-١}_{\text{س س}}$ التى حسبناها من قبل

$$\text{تبا}\,(\hat{\underline{\text{ب}}}) = \text{٠ر٠٠٨٢٩٤} \begin{bmatrix} \text{٢ر٢٤٤٠} & -\text{٥ر١٦١٥} \\ -\text{٥ر١٦١٥} & \text{٢٠ر٤٤٩٩} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{٠ر٠١٨٦} & -\text{٠ر٠٤٢٨} \\ -\text{٠ر٠٤٢٨} & \text{٠ر١٦٩٦} \end{bmatrix}$$

ولمقارنة هذه النتائج بطريقة راير سول :

(١) نوجد $\underline{\text{م}}^{-١}_{\text{س ع}}$ أى مقلوب مصفوفة عزوم ص$_{١}$، ص$_{٢}$ مع ع$_{١}$، ع$_{٢}$:

$$\underline{\text{م}}^{-١}_{\text{س ع}} = \begin{bmatrix} \text{١ر٢٥٠٠} & \text{٠ر٥٠٠٠} \\ \text{٠ر٢٦٨٠} & \text{٠ر٢٢٥٥} \end{bmatrix}^{-١} = \begin{bmatrix} \text{١ر٥٢٤٩} & -\text{٣ر٣٨١٢} \\ -\text{١ر٨١٢٣} & \text{٨ر٤٥٣١} \end{bmatrix}$$

(٢) فيكون تقدير $\hat{ب}_1$ ، $\hat{ب}_2$ هو حاصل ضرب هذا المقلوب فى موجه عزوم ص. مع ع١ ، ع٢ كما فى (٥١') :

$$\begin{bmatrix} \hat{ب} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} ١ر٥٢٤٩ & -١ر٨١٢٣ \\ -١ر٣٨١٢ & ٨ر٤٥٣١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٠ر٢٣٨٠ \\ ٠ر٧٢١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ر٦٦٩٦ \\ ٦ر٨٩٩٤ \end{bmatrix}$$

(٣) ويقتضى حساب مجموع مربعات البواقى الرجوع الى عزوم المتغيرات الاصلية كما فى (٥٢) ، أى نضرب المصفوفة

$$\begin{bmatrix} ٣ر٢٤٠٠ & -٠ر٢٧٣٦ & ٠ر٤٤٤٥ \\ -٠ر٢٧٣٦ & ١ر٥٦٢٥ & ٠ر٣٠٨٢ \\ ٠ر٤٤٤٥ & ٠ر٣٠٨٢ & ٠ر١٤٠٦ \end{bmatrix}$$

من اليمين واليسار فى موجه المعاملات لنحصل على

$$مج\ \hat{ق}^2 = ٠ر١٤٠٧$$

$$ومنها \quad \hat{ى} = \frac{٠ر١٤٠٧}{٢٠ - ٣} = ٠ر٠٠٨٢٧٩$$

وهى نفس النتيجة السابقة فيما عدا أخطاء التقريب .

(٤) أما مصفوفة التباين فتتطلب حساب $م^{-1}_{ع\,س}\ م_{ع\,ع}\ م^{-1}_{س\,ع}$

$$= \begin{bmatrix} ١ر٥٢٤٩ & -١ر٨١٢٣ \\ -٣ر٣٨١٢ & ٨ر٤٥٣١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ر٥١٦٨ & ٠ر٤٩١٧ \\ ٠ر٤٩١٧ & ٠ر٤٣٦٩ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ر٥٢٤٩ & -٣ر٣٨١٢ \\ -١ر٨١٢٣ & ٨ر٤٥٣١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ر٢٤٤٠ & -٥ر١٦١٥ \\ -٥ر١٦١٥ & ٢٠ر٤٤٩٩ \end{bmatrix}$$

وهى نفس المصفوفة $ح^{-1}_{س\,س}$ التى حصلنا عليها من قبل ، ولذلك فأن ضربها فى $\hat{ى}$ يعطى نفس التقديرات السابقة (ما عدا أخطاء التقريب) .

مثال (٨) : لبيان اسلوب الحل عندما يكون بعض المتغيرات خال من الخطأ وعندما يزيد عدد المتغيرات المساعدة عن م ـ ١ نستخدم بيانات المثال (٤) لتوفيق المعادلات :

(أ) $\text{ص}_{٠}$ دالة فى $\text{ص}_{١}$ ، $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ باستخدام $\text{ع}_{٣}$ متغيرا مساعدا

(ب) $\text{ص}_{٠}$ دالة فى $\text{ص}_{١}$ ، $\text{ع}_{١}$ باستخدام $\text{ع}_{٢}$ ، $\text{ع}_{٣}$ متغيرين مساعدين علما بأن ن = ١٥ .

(أ) المعادلة الاولـــى :

١ـ مصفوفة المتغيرات المساعدة هى

$$\text{م}_{\text{ع ع}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٣٧٤٦} & -\text{٠ر٠٥٥٣} & \text{٠ر٧٦٩٠} \\ -\text{٠ر٠٥٥٣} & \text{١ر٧٠٣٦} & -\text{١ر١٧٩٩} \\ \text{٠ر٧٦٩٠} & -\text{١ر١٧٩٩} & \text{٢ر٤٨٣٠} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{م}_{\text{ع ع}}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{١٩ر٠٩٦٩} & -\text{٥ر١٨١٥} & -\text{٨ر٣٧٦٣} \\ -\text{٥ر١٨١٥} & \text{٢ر٢٨٠٨} & \text{٢ر٦٨٨٥} \\ -\text{٨ر٣٧٦٣} & \text{٢ر٦٨٨٥} & \text{٤ر٢٧٤٣} \end{bmatrix}$$

٢ـ كذلك نوجد مقلوب مصفوفة عزوم المتغيرات ع* الداخلة فى المعادلة :

$$\text{م}_{\text{ع* ع*}}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٣٧٤٦} & -\text{٠ر٠٥٣٣} \\ -\text{٠ر٠٥٣٣} & \text{١ر٧٠٣٦} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{٢ر٦٨٢١} & \text{٠ر٠٨٧١} \\ \text{٠ر٠٨٧١} & \text{٠ر٥٨٩٨} \end{bmatrix}$$

٣ـ وباستخدام هاتين المصفوفتين نوجد

$$\text{ح}_{\text{ص ص}} = \text{م}_{\text{ص ع}}\ \text{م}_{\text{ع ع}}^{-1}\ \text{م}_{\text{ع ص}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٩٤٧٩} & \text{٠ر٩١٢٨} \\ \text{٠ر٩١٢٨} & \text{٠ر٨٩٧٢} \end{bmatrix}$$

ومنها : $$\text{ك}_{\text{ص ص}} = \text{م}_{\text{ص ص}} - \text{ح}_{\text{ص ص}} = \begin{bmatrix} \text{٠ر٠٥٤٣} & \text{٠ر٠٤٥٤} \\ \text{٠ر٠٤٥٤} & \text{٠ر٠٥٢٩} \end{bmatrix}$$

٤ ـ كذلك نوجد :

$$\begin{bmatrix} \text{٠ر٠٨٧١} & \text{٢ر٦٨٢١} \\ \text{٠ر٥٨٩٨} & \text{٠ر٠٨٧١} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{٠ر٩٩٩٨ ـ} & \text{٠ر٣٥٤٦} \\ \text{١ر٠١٠٩ ـ} & \text{٠ر٢٨٢٣} \end{bmatrix} = \text{ع * ع *} \; \underset{=}{\text{أ}}^{-1} \; \underset{=}{\text{أ}}\,\text{ص ع*}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{٠ر٥٥٨٨ ـ} & \text{٠ر٨٦٤٠} \\ \text{٠ر٥٧١٦ ـ} & \text{٠ر٦٦٩١} \end{bmatrix}$$

ومنها

$$\begin{bmatrix} \text{٠ر٨٠٨٩} & \text{٠ر٨٦٥١} \\ \text{٠ر٧٦٦٨} & \text{٠ر٨٠٨٩} \end{bmatrix} = \text{ص} \,*\, \text{ع} \; \underset{=}{\text{أ}} \,*\, \text{ع} \,*\, \text{ع} \; \underset{=}{\text{أ}}^{-1} \; \underset{=}{\text{أ}}\,\text{ص ع*} = \underset{=}{\text{ج}}^{*}\text{ص ص}$$

٥ ـ ونظرا لان : $\underset{=}{\text{ك}}^{*}\text{ص ص} - \underset{=}{\text{ك}}\,\text{ص ص} = \underset{=}{\text{ج}}\,\text{ص ص} - \underset{=}{\text{ج}}^{*}\text{ص ص}$

$$\begin{bmatrix} \text{٠ر١٠٣٩} & \text{٠ر٠٨٢٨} \\ \text{٠ر١٣٠٤} & \text{٠ر١٠٣٩} \end{bmatrix} = \underset{=}{\text{ك}}\,\text{ص ص} - \underset{=}{\text{ك}}^{*}\text{ص ص} \quad \therefore$$

٦ ـ ويكون $\hat{\text{ب}}_{1} = \dfrac{\text{٠ر١٠٣٩}}{\text{٠ر١٣٠٤}} = \text{٠ر٧٩٦١}$

٧ ـ ومنها $\underset{=}{\hat{\text{ج}}} = - \underset{=}{\hat{\text{ب}}} \; \underset{=}{\text{أ}}\,\text{ص ع*} \; \underset{=}{\text{أ}}^{-1}_{\text{م}} \; \text{ع*ع*}$

$$= - \begin{bmatrix} \text{٠ر٧٩٦١} & \text{١ر٠٠٠٠ ـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{٠ر٥٥٨٨ ـ} & \text{٠ر٨٦٤٠} \\ \text{٠ر٥٧١٦ ـ} & \text{٠ر٦٦٩١} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{٠ر١٠٣٧ ـ} & \text{٠ر٣٣١٣} \end{bmatrix}$$

٨ ـ ولحساب مجموع مربعات البواقى :

$\text{مح ق}^{2} = \underset{=}{\hat{\text{ب}}} \; \text{ك}^{*}\text{ص ص} \; \underset{=}{\hat{\text{ب}}}' = \underset{=}{\hat{\text{ب}}} \; \underset{=}{\text{ك}}\,\text{ص ص} \; \underset{=}{\hat{\text{ب}}}'$

$$= \begin{bmatrix} -1.000 & 0.7961 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1371 & 0.1493 \\ 0.1493 & 0.1833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.000 \\ 0.7961 \end{bmatrix} = 0.01555$$

$$\therefore\ \hat{\text{ى}} = \frac{0.01555}{15-4} = 0.001414$$

٩ــ ولحساب مصفوفة التباين نلاحظ أن $\underline{\text{ف}}_{\text{صص}}$ تتكون من عدد واحد لان هناك متغير واحد متبوع من بين المتغيرات ص وهو ص_1 ، ويكون هذا العدد هو تباين معامله : وبالتالى فـأن (٥٩) تعطى :

$$\text{تبا}\,(\hat{\text{ب}}_1) = \text{ف}_{\text{صص}} = \frac{0.001414}{0.1304} = 0.010844$$

ويكون تغاير $\hat{\text{ب}}_1$ مع $\hat{\underline{\text{ح}}}$ حسب (٥٧) هو الموجه :

$$\underline{\text{ف}}_{\text{صع}^*} = -\,0.010844 \begin{bmatrix} 0.6691 & -0.5716 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.007256 & 0.006198 \end{bmatrix}$$

واخيرا فأن مصفوفة تباين $\hat{\underline{\text{ح}}}$ هى

$$\underline{\text{ف}}_{\text{ع}^*\text{ع}^*} = 0.001414 \begin{bmatrix} 2.6821 & 0.0871 \\ 0.0871 & 0.5898 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -0.007256 & 0.006198 \end{bmatrix} \times \frac{1}{0.010844} \begin{bmatrix} -0.007256 \\ 0.006198 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.003792 & 0.000123 \\ 0.000123 & 0.000834 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.004855 & -0.004147 \\ -0.004147 & 0.003542 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.008647 & -0.004024 \\ -0.004024 & 0.004376 \end{bmatrix}$$

١٠ـ أى أن مصفوفة التباين هى :

$$\widehat{\underline{\underline{\text{تبا}}}}\,(\hat{\underline{\text{أ}}}) = \left[\begin{array}{ccc} \text{٠ر٠٠٦٢} & -\text{٠ر٠٠٧٣} & \text{٠ر٠١٠٨} \\ -\text{٠ر٠٠٤٠} & \text{٠ر٠٠٨٦} & -\text{٠ر٠٠٧٣} \\ \text{٠ر٠٠٤٤} & -\text{٠ر٠٠٤٠} & \text{٠ر٠٠٦٢} \end{array}\right]$$

ومن جهة أخرى فقد كان فى الامكان ضرب $\hat{\text{ى}}$ فى مقلوب المصفوفة $\underline{\underline{\text{ج}}}_{\text{س س}}$:

$$\underline{\underline{\text{ج}}}^{-1}_{\text{س س}} = \left[\begin{array}{ccc} -\text{١ر٠١٠٩} & \text{٠ر٢٨٢٣} & \text{٠ر٨٩٧٢} \\ -\text{٠ر٠٥٥٣} & \text{٠ر٣٧٤٦} & \text{٠ر٢٨٢٣} \\ \text{١ر٧٠٣٦} & -\text{٠ر٠٥٥٣} & -\text{١ر٠١٠٩} \end{array}\right]^{-1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \text{٤ر٣٨٢٢} & -\text{٥ر١٢٨٩} & \text{٧ر٦٦٥٧} \\ \text{٢ر٨٤٤٩} & \text{٦ر١١٤٠} & -\text{٥ر١٢٨٩} \\ \text{٣ر٠٩٥٠} & \text{٢ر٨٤٤٩} & \text{٤ر٣٨٢٢} \end{array}\right]$$

وبضرب هذه المصفوفة فى $\hat{\text{ى}}$ نحصل على مصفوفة التباين مباشرة • لاحظ أيضا أن ضرب هذه المصفوفة فى الموجه $\underline{\text{ح}}_{\text{س}}$ • يعطى تقدير المعاملات دفعة واحدة ومنها يمكن حساب $\hat{\text{ى}}$ •

كذلك يمكن تطبيق طريقة رايرسول بحساب $\underline{\text{م}}^{-1}_{\text{س ع}}$ واستخدامها لحساب المعاملات ثم مصفوفة التباين ، على نحو ما فعلنا فى المثال السابق •

(ب) المعادلة الثانية

فى هذه الحالة ل = م ونحتاج الى حساب الجذر الاصغر بالطريقة المعتادة :

١) نوجد $\underline{\text{م}}^{-1}_{\text{ع ع}}$ وهى نفسها التى حسبناها فى المعادلة الاولى •

أما $\underline{\text{م}}$ ع * ع * فهى عدد واحد هو عزم $\text{ع}_{١}$ أى ٠ر٣٧٤٦ ولذلك فأن

$$\left(\underline{\text{م}}\,\text{ع}^{*}\text{ع}^{*}\right)^{-١} = \frac{١}{٠ر٣٧٤٦} = ٢ر٦٦٩٥$$

٢) فتكون $\underline{\text{م}}\,\text{صع}^{*}$

$$\left(\underline{\text{م}}\,\text{ع}^{*}\text{ع}^{*}\right)^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ر٣٥٤٦ \\ ٠ر٢٨٢٣ \end{bmatrix} \times ٢ر٦٦٩٥ = \begin{bmatrix} ٠ر٩٤٦٦ \\ ٠ر٧٥٣٦ \end{bmatrix}$$

ومنها $\underline{\text{ك}}^{*}\text{ص ص}$

$$= \begin{bmatrix} ١ر٠٠٢٢ & ٠ر٩٥٨٢ \\ ٠ر٩٥٨٣ & ٠ر٩٥٠١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ر٩٤٦٦ \\ ٠ر٧٥٣٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ر٣٥٤٦ & ٠ر٢٨٢٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ر٦٦٦٦ & ٠ر٦٩١٠ \\ ٠ر٦٩١٠ & ٠ر٧٣٧٤ \end{bmatrix}$$

٣) وتكون المعادلة المحددية هـــى :

$$\begin{vmatrix} (٠ر٦٦٦٦ - ٠ر٠٥٤٣\,\text{ى}) & (٠ر٦٩١٠ - ٠ر٠٤٥٤\,\text{ى}) \\ (٠ر٦٩١٠ - ٠ر٠٤٥٤\,\text{ى}) & (٠ر٧٣٧٤ - ٠ر٠٥٢٩\,\text{ى}) \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\therefore (٠ر٤٩١٦ - ٠ر٠٧٥٣\,\text{ى} + ٠ر٠٠٢٩\,\text{ى}^{٢}) - (٠ر٤٧٧٥ - ٠ر٠٦٢٧\,\text{ى} + ٠ر٠٠٢١\,\text{ى}^{٢})$$

$$= ٠ر٠٠٠٨\,\text{ى}^{٢} - ٠ر٠١٢٦\,\text{ى} + ٠ر٠١٤١ = \text{صفر}$$

وجذرا هذه المعادلة هما ١ر٢١٩٥ ، ١٤ر٢٦٧٦ .

ويمكن اختبارهما للتأكد من أن المعادلة تامة وغير مزدوجـــة .

٤) فيكون تقدير $\hat{\text{ب}}_{١}$ بالتعويض عن ى بالجذر الاصغر هـــى :

$$\hat{\text{ب}}_{١} = \frac{٠ر٦٩١٠ - ٠ر٠٤٥٤ \times ١ر٢١٩٥}{٠ر٧٣٧٤ - ٠ر٠٥٢٩ \times ١ر٢١٩٥} = \frac{٠ر٦٣٥٦}{٠ر٦٧٢٩} = ٠ر٩٤٤٦$$

٥) ومنها تقدير ح١ هو :

ح^١ = ـ [ـ١ر٠٠٠ ٠ر٩٤٤٦] [٠ر٩٤٦٦ / ٠ر٧٥٣٦] = ٠ر٢٣٤٧

٦) ويكون تقدير التباين كالاتى :

معـ ق^٢ = [ـ١ر٠٠٠ ٠ر٩٤٤٦] [٠ر٦٦٦٦ ٠ر٦٩١٠ / ٠ر٦٩١٠ ٠ر٧٣٧٤] [ـ١ر٠٠٠ / ٠ر٩٤٤٦]

= ٠ر١٩٢

∴ ى^ = ٠ر١٩٢ / (١٥ ـ ٣) = ٠ر٠١٦

ويلاحظ أنه أكبر قليلا من التباين المحسوب بأدراج ع٢ ضمن المعادلة .

٧) ولحساب ف ص ص (وهى ايضا عدد)يوجد اسلوبان :

الاول : وهو اسلوب تنتنر ويعتمد على ايجاد مقلوب (ك*ص ص ـ ك ك ص ص) فى الجزء الخاص بالمتغيرات المتبوعة ، وهو فى هذه الحالة عدد = ٠ر٦٧٢٩ ، وقد اوجدناه فعلا عند حساب ب^١

∴ تبا (ب^١) = ٠ر٠٠١٦ × ١ / ٠ر٦٧٢٩ = ٠ر٠٠١٦ × ٤ر٤٨٦١ = ٠ر٠٠٢٣٧٨

ومنه نوجد التغايرات وتباينات ح^ بنفس الطريقة السابقة :

ف ص ع* = −٠ر٠٠٢٣٧٨ × ٠ر٧٥٣٦ = −٠ر٠٠١٧٩٢

ف ع* ع = ٠ر٠٠١٦ × ٢ر٦٦٩٥ + (−٠ر٠٠١٧٩٢) × (١ / ٠ر٠٠٢٣٧٨) × (−٠ر٠٠١٧٩٢)

= ٠ر٠٠٤٢٧١ + ٠ر٠٠١٣٥٠ = ٠ر٠٠٥٦٢١

وتكون مصفوفة التباين هى

[٠ر٠٠٢٤ −٠ر٠٠١٨ / −٠ر٠٠١٨ ٠ر٠٠٥٦]

<u>الثاني :</u> وهو أسلوب اندرسون ويختلف فى قيمة $\text{ف}_{\text{ص ص}}$ وبالتالى تتأثر باقى حدود المصفوفة بنفس النسبة :

$$\hat{\text{ب}}\ \text{ك}_{\text{ص ص}} = \begin{bmatrix} -\text{١ر٠٠٠} & \text{٠ر٩٤٤٦} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{٠ر٠٥٤٣} & \text{٠ر٠٤٥٤} \\ \text{٠ر٠٤٥٤} & \text{٠ر٠٥٢٩} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\text{٠ر٠١١٤} & \text{٠ر٠٠٤٦} \end{bmatrix}$$

وباستبقاء الجزء الخاص بالمتغيرات المتبوعة نجد أنه فى هذه الحالة هو عدد واحد وهو ٠ر٠٠٤٦ وتكون $\text{ل}_{\text{ص ص}}$ هى الاخرى عدد هو مربع ٠ر٠٠٤٦ أى ٠ر٠٠٠٠٢١

$$\therefore\ \frac{\text{ك}_{1}(\text{ك}_{1}-1)}{\hat{\text{ى}}} \times \text{ل}_{\text{ص ص}} = \frac{\text{١ر٢١٩٥} \times \text{٠ر٢١٩٥}}{\text{٠ر٠٠١٦}} \times \text{٠ر٠٠٠٠٢١} = \text{٠ر٠٠٣٥١٣}$$

وبما أن $\text{ك}^{*}_{\text{ص ص}}$ فى الجزء الخاص بالمتغيرات المتبوعة هى ٠ر٦٨٤٥

$$\therefore\ \text{ف}_{\text{ص ص}} = \text{٠ر٠٠١٦} \left[(\text{٠ر٦٨٤٥} - \text{٠ر٠٠٣٥١٣}) \right]^{-1} = \text{٠ر٠٠١٦} \times \frac{1}{\text{٠ر٦٨٠٩٨٧}}$$

$$= \text{٠ر٠٠١٦} \times \text{١ر٤٦٨٥} = \text{٠ر٠٠٢٣٤٩}$$

ويمكن حساب باقى الحدود بنفس الطريقة السابقة فنحصل على التقدير الاتى لمصفوفة التباين :

$$\begin{bmatrix} \text{٠ر٠٠٢٣} & -\text{٠ر٠٠١٨} \\ -\text{٠ر٠٠١٨} & \text{٠ر٠٠٥٦} \end{bmatrix}$$

<u>ملحوظة :</u> يمكن حساب جميع حدود المصفوفة مباشرة بحساب المصفوفة $\text{هـ}_{\text{ص ص}}$ التى تحسب منها $\text{ف}_{\text{ص ص}}$ ثم ايجاد مقلوب المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} \text{هـ}_{\text{ص ص}} & \text{م}_{\text{ص ع}^{*}} \\ \text{م}_{\text{ع}^{*}\text{ص}} & \text{م}_{\text{ع}^{*}\text{ع}^{*}}^{*} \end{bmatrix}$$

والاختلاف فى $\text{هـ}_{\text{ص ص}}$ يؤثر على باقى الحدود ، ففى الطريقة الاولى :

$$\hat{\text{هـ}}_{\text{ص ص}} = \text{م}_{\text{ص ص}} - \text{ك}_1 \; \text{ك}_{\text{ص ص}} = \text{٠ر٨٨٥٦}$$

$$\therefore \; \text{تبا}\,(\hat{\text{أ}}) = \text{٠ر٠٠١٦} \begin{bmatrix} \text{٠ر٨٨٥٦} & \text{٠ر٢٨٢٣} \\ \text{٠ر٢٨٢٣} & \text{٠ر٣٧٤٦} \end{bmatrix}^{-1} = \text{٠ر٠٠١٦} \begin{bmatrix} \text{١ر٤٨٦٣} & \text{ــ١ر١٢٠٢} \\ \text{ــ١ر١٢٠٢} & \text{٣ر٥١٣٧} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{٠ر٠٠٢٤} & \text{ــ٠ر٠٠١٨} \\ \text{ــ٠ر٠٠١٨} & \text{٠ر٠٠٥٦} \end{bmatrix}$$

أما فى الطريقة الثانية فأن :

$$\hat{\text{هـ}}_{\text{ص ص}} = \text{ج}_{\text{ص ص}} - \frac{\text{ك}_1\,(\text{ك}_1 - 1)}{\text{ى}} \; \text{ل}_{\text{ص ص}}$$

$$= \text{٠ر٨٩٧٢} - \text{٠ر٠٠٣٥١٣} = \text{٠ر٨٩٣٦٨٧}$$

$$\therefore \; \text{تبا}\,(\hat{\text{أ}}) = \text{٠ر٠٠١٦} \begin{bmatrix} \text{٠ر٨٩٣٧} & \text{٠ر٢٨٢٣} \\ \text{٠ر٢٨٢٣} & \text{٠ر٣٧٤٦} \end{bmatrix}^{-1} = \text{٠ر٠٠١٦} \begin{bmatrix} \text{١ر٤٦٨٦} & \text{ــ١ر١٠٦٩} \\ \text{ــ١ر١٠٦٩} & \text{٣ر٥٠٣٩} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{٠ر٠٠٢٣} & \text{ــ٠ر٠٠١٨} \\ \text{ــ٠ر٠٠١٨} & \text{٠ر٠٠٥٦} \end{bmatrix}$$

ويتضح من مقارنة المقلوب فى الحالتين أن هناك فرق بين الطريقتين ولكنه لم يؤثر كثيرا على قيم التباينات والتغايرات حتى رابع رقم عشرى (فى هذا المثال) .

وبذلك يمكن تلخيص المعادلتين اللتين حصلنا عليهما فى هذا المثال كالاتى :

$$\text{ص}_{\circ} = \underset{(\text{٠ر١٠٤})}{\text{٠ر٧٩٦}\,\text{ص}_1} + \underset{(\text{٠ر٠٩٣})}{\text{٠ر٣٣١}\,\text{ع}_1} - \underset{(\text{٠ر٠٦٦})}{\text{٠ر١٠٤}\,\text{ع}_2} + \hat{\text{ح}}_{\circ} + \hat{\text{ق}} \qquad \hat{\text{ى}} = \text{١٤١٤}$$

$$\text{ص}_{\circ} = \underset{(\text{٠ر٠٤٨})}{\text{٠ر٩٤٥}\,\text{ص}_1} + \underset{(\text{٠ر٠٧٥})}{\text{٠ر٢٣٥}\,\text{ع}_1} + \hat{\text{ح}}_{\circ} + \hat{\text{ق}} \qquad \hat{\text{ى}} = \text{١٦٠٠}$$

وفى كل من هاتين المعادلتين يمكن تقدير الحد المطلق ثـ بمعلومية المتوسطات وكذلك تقدير تباينه باستخدام مصفوفة تباينات باقى المعاملات ، وذلك بنفس الطريقة التى اتبعناها عند تطبيق نظرية المربعات الصغرى .

ويلاحظ ان صفات التقديرات تقترب من التوزيع المعتاد عندما تكون العينة كبيرة (١٠٠ أو أكثر) . ولكن لما كانت الدراسات الاقتصادية لا تتوفر فيها عادة مثل هذه الاحجام فأنه يمكن استخدام اختبار ت لاختبار معنوية المعاملات كأختبار تقريبى .

وأخيرا يلاحظ أن معامل $ع_٢$ (سعر الفائدة) غير معنوى ، ولو أنه سالب التأثير عدديا كما هو الارجح . وقد ادى اهماله من المعادلة الى تغير عددى ملحوظ فى الميل الحدى لكل من الاجور والارباح بشكل قد يدعو الى التساؤل نظرا لكبر الاول بحيث اقترب من الواحد الصحيح مع صغر الثانى فى نفس الوقت بشكل ملحوظ ويمكن اختبار الفرق بين المعاملين للتأكد من أن الاول فعلا أكبر من الثانى فى كل من المعادلتين . غير أن هناك احتمال وجود علاقة وثيقة بين $ص_١$ ، $ع_٢$ أدت الى عدم دقة تقدير المعاملات بعض الشىء ولذلك فأن هذه المعادلة تحتاج الى مزيد من الدراسة .

<u>تمرين (٦)</u> : قارن نتائج المثال (٨) بتلك التى تحصل عليها بالمربعات الصغرى .

مسائـــــــل

١ ـ ما هي الصعوبات الأحصائية التي تصادف عملية التقدير عند وجود أخطاء في المتغيرات ؟
أريد تقدير معالم معادلة تضم ثلاثة متغيرات $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، فوجـــد أن
مصفوفة ارتباط المتغيرين الأولين هي :

$$\begin{bmatrix} \text{١ر٠٠٠} & \text{ـ٠ر١٢٢} \\ \text{ـ٠ر١٢٢} & \text{١ر٠٠٠} \end{bmatrix}$$

وعند أدخال المتغير $س_{٣}$ كانت مصفوفة المرافقات لمصفوفة الأرتباط هـــي :

$$\begin{bmatrix} \text{٠ر٩٥٥} & \text{٠ر٠٧٤} & \text{٠ر١٩٩} \\ \text{٠ر٠٧٤} & \text{٠ر٩٥٠} & \text{ـ٠ر١٨٥} \\ \text{٠ر١٩٩} & \text{ـ٠ر١٨٥} & \text{٠ر٩٨٥} \end{bmatrix}$$

أختبر أثر أدخال $س_{٣}$ على معامل انحدار $س_{١}$ على $س_{٢}$.

٢ ـ أذكر القواعد التي يقوم عليها تحليل فريش لحزم الأنحدار .
استخدم البيانات المعطاة في المثال بالقسم (١٦) لتحليل حزم الأنحدار بين المتغيرات
$ص_{٠}$ ، $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$.

٣ ـ استخدم طريقة راير سول لحساب تقدير معالم المعادلة في المثال الأخير ، التي فيهـــا
$ص_{٠}$ دالة في $ص_{٢}$ ، $ع_{١}$ بينما $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ متغيران مساعدان .

٤ ـ عند تقدير معالم معادلة تضم متغيرين مشاهدين بخطأ من ٢٢ مشاهدة باستخـــدام ٣
متغيرات محددة وجد أن
مصفوفة عزوم المتغيرات = $\begin{bmatrix} \text{٩} & \text{٥} \\ \text{٥} & \text{٨} \end{bmatrix}$ ، مصفوفة عزوم تقديرات الأخطاء = $\begin{bmatrix} \text{١} & \text{ـ١} \\ \text{ـ١} & \text{٣} \end{bmatrix}$

أوجد تقدير معاملات المعادلة بطريقة المربعات الصغرى (باعتبار المتغير الثانى هو التابع) علما بأن متوسطى المتغيرين هما ١٢ ، ١٥ على الترتيب . قارن الناتج بالتقدير المحسوب بطريقة المتغيرات المساعدة .

٥ - ما هو المقصود بالازدواج الخطى ؟

من مشاهدات عددها ١٩ مشاهدة حسبت مصفوفة عزوم المتغيرات $س_{0}$ ، $س_{1}$ ، $س_{2}$ ، $س_{3}$ فكانت كالاتــــى :

					الوسط الحسابى
$س_{0}$	٥٥٧٠				٧ر٤٢
$س_{1}$	٤١٧٠	٥٢٣٠			٣ر١٧
$س_{2}$	-٢٥٦٠	-١١٢٠	٤٢٤٠		-٥ر٣٦
$س_{3}$	٩٦٠	٣١٤٠	٢٧٦٠	٤٩٠٠	٤ر٨٣

أدرس أثر أدخال كل من $س_{2}$ ، $س_{3}$ على العلاقة بين $س_{0}$ ، $س_{1}$ باعتبار أن جميع هذه المتغيرات مشاهد بخطأ .

٦ - أذكر الأسس التى تقوم عليها نظرية رايرسول للمتغيرات المساعدة .

فيما يلى مصفوفة ارتباط بين خمسة متغيرات اقتصادية :

$س_{1}$	١ر٠٠٠				
$س_{2}$	٠ر٨٣٥	١ر٠٠٠			
$س_{3}$	٠ر٦٥٧	٠ر٤٩٢	١ر٠٠٠		
$س_{4}$	٠ر٦١٤	٠ر٥١٣	ر٨٢٢	١ر٠٠٠	
$س_{5}$	٠ر٥٧٠	٠ر٤٩٨	ر٨٦٦	٠ر٦٣٧	١ر٠٠٠

والمطلوب تقدير معاملات انحدار المتغير $س_{1}$ على كل $س_{2}$ ، $س_{3}$ باعتبار $س_{4}$ ، $س_{5}$ متغيرين مساعدين .

٧ ـ أدرس ظاهرة الازدواج الخطى بين الثلاث متغيرات الأولى فى المثال السابق عن طريق تحليل حزم الأنحدار ٠

٨ ـ فى دراسة عن الاقتصاد الأمريكى خلال السنوات ١٩٢٩ ـ ١٩٤١ ، ١٩٤٦ ـ ١٩٥٣ وجد أن مصفوفة عزوم بعض المتغيرات كالاتـــى :

ص$_0$	٨ر٩٩٣			
ص$_1$	٣٤ر٧١٧	١٤٠ر٥٦٤		
ع$_1$	٧ر٨٨١	٣٠ر٣٣٦	٧ر٤٤٣	
ع$_2$	٩ر٢١٦	٣٦ر٥٥٨	٨ر٢٢٣	١١ر١٨٦

حيث : ص$_0$ = المخزون فى نهاية العام ، ص$_1$ = اجمالى المبيعـــات

ع$_1$ = المخزون فى بداية العام ، ع$_2$ = الأنفاق الحكومى الجارى

والمطلوب استخدام ع$_2$ كمتغير مساعد لتقدير معالم معادلة تفسر ص$_0$ بدلالـة ص$_1$ ، ع$_1$

٩ ـ أوجد تقديرات التباين للمعاملات المحسوبة فى السؤال السابق

١٠ ـ أحسب تقديرات التباين للتقديرات المحسوبة فى مثال (٦)