جمهورية مصر العربية

معهد التخطيط القومي

نسخة واحدة

مذكرة رقم (١٢٣١)

الالعاب الاستراتيجية
ومبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى

اعداد

دكتور ابراهيم احمد مخلوف

اكتوبر ١٩٧٨

القاهرة
طريق صلاح سالم مدينة نصر

فهـــرس

مقدمـــــة عامـــــــة

هذه المذكرة هى ملخص لرسالة دكتوراه الدولة عن " الالعاب الاستراتيجية ومبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى " التى قدمت الى جامعة العلوم الاجتماعية بتولوز بفرنسا فى فبرايـــر سنـــــة ١٩٧٨ . *

تمثل نظرية الألعاب الاستراتيجية games of strategy فرعا هاما من فروع بحـــوث العمليات ، كما تضيف رصيدا كبيرا ومتزايدا من الكتب الجديدة الى مكتبة العلوم الرياضيـــــة والاقتصاد الرياضى والاحصاء ، وتعتبر هذه النظرية أسلوبا رياضيا جديدا لاتخاذ القـــرارات ذلك أن نتائج قرارات الأفراد فى المجتمع لاتعتمد على تصرفاتهم الخاصة فحسب ، بل أن هـــذه النتائج تتأثر أيضا بقرارات الأفراد الاخرين وبالصدفة ، يحاول كل فرد أن يعظم دالة يمكـــن أن يؤثر فى المتغيرات التى تتعلق بتصرفاته الخاصه ولكنه لا يستطيع أن يؤثر فى المتغــــيرات التى تتعلق بتصرفات الاخرين ، هذه المتغيرات لا يمكن من وجهة نظر هذا الفرد أن يعـــبر عنها بواسطة فروض احصائية ، فالأفراد الاخرين يتصرفون مثله طبقا لمبادئ رشيده ، ولاتعتـــبر أى طريقة لتصرف الفرد سليمه عندما لاتأخذ فى الاعتبار هذه الاهتمامات المتصارعة المتداخلـــه ، بعض هذه الاهتمامات تكون أقل أو أكثر توافقا ، وفى هذه الحالة فاننا نكون أقرب من مشكلـــــة تعظيم بسيطة ، ولكنها يمكن أن تكون أيضا متضادة ويظهر فى هذه الحالة خليط فريد ومحير من مشاكل تعظيم متعددة متصارعه ، ويصبح من الضرورى أن نضع معيارا جديدا لمعالجة هـــذه الحالة ، وقد أتت نظرية الألعاب الاستراتيجية بهذا المعيار وذلك بتقديم مبدأ النهايـــــة الصغرى للنهايات العظمى the principle of minimax . يقوم هذا المبدأ علـــى نظرية النهاية الصغرى للنهايات العظمى التى أثبتها فون ينومان Von Neumann لأول مـــرة

---

* Makhluf Ibrahim, "Les jeux de stratégie et le principle du minimax", Thése pour le Doctorat d'Etat es Sciences Economiques, Université des Sciences Sociales de Toulonse, Février, 1978.

عـــــام ١٩٢٨* .

تضمن هذه النظرية بصفة عامة وجود حل للعبتة الثنائية الصفرية Zero-sum game في صورة استراتيجيات مركبة mixed strategies في الشكل الطبيعي للعبة the normalized from the game ، ولكن الشكل الطبيعي ليس الا وصفا نهائيا لها ، ولدراسة هذا المبدأ بدقة يجب تحليل تصميم اللعبة الذي يوضح الخطوات العشوائية the chance moves والخطوات الشخصية the personal moves ونظام المعلومات ...الخ ، هذا التصميم يعرف بالشكل المكثف للعبة the extensive form of the game ، أما الشكل الطبيعي فيمكن الحصول عليه بتعريف دوال المدفوعات pay-off functions على متجهات الاستراتيجيات.**

يمكن للاعبين أن يصمموا قبل بداية المباراه خطة للعب من الخطوة الاولى حتى الخطوة الأخيرة ، تأخذ هذه الخطة في الاعتبار جميع الظروف التي تظهر خلال المباراه تشمل أيضا المعلومات التي يحصل عليها اللاعب أثناء السير الفعلي للمباراه طبقا لقواعد اللعبة ، تعرف هذه الخطة بالاستراتيجية a strategy ، ولا يفقد اللاعب الذي يستخدم استراتيجية معينة أي حرية للتصرف لأنها تأخذ في الاعتبار تصرفات اللاعب طبقا للمعلومات التي يحصل عليها ، ويحدد نظام المعلومات في اللعبة طبيعة استراتيجيات النهاية الصغرى للنهايات العظمى للاعبين ، ذلك أن الألعاب ذات المعلومات التامة games with perfect information لها استراتيجيات بسيطة pure strategies بينما أن الالعاب ذات المعلومات الغير تامة games with imperfect information لها استراتيجيات مركبة mixed strategies

---

* Cf. (10), p. 154.

** أنظر ٢٠١ .

وسوف نختار فى هذه المذكرة لعبة البوكر Poker كمثال لتوضيح مفهوم الاستراتيجية ودراسة الخصائص الأساسية لمبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى ، ذلك أن المعلومات الغير تامة والخطوات العشوائية التى تميز هذه اللعبة تخلق عدم التأكد بين اللاعبين وتقود الى توضيح فكرة الخديعة bluffing ، وتبين هذه اللعبة أن تغيير قيمة المراهنة يغير من سلوك اللاعبين وأنه من الضرورى تطبيق فكرة الخديعة لزيادة عدم التأكد عند الخصم ، ويوضح هذا المثال أيضا كيف أن اللاعب يمكن أن يتحكم فى الخديعة وكيف يمكنه أيضا أن يعاقب خصمه الذى يخدع بطريقة غير مبررة طبقا لمبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى .

يستخدم مبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى كوسيلة رياضية هامة لمعالجة بعض النماذج الاقتصادية مثل نموذج ينومان للنمو الاقتصادى* ، ولكن يلاحظ أن استخدام هذا المبدأ كأداة رياضية لا يعنى أن الموقف الذى يعبر عنه النموذج يمثل لعبة حقيقية ، وذلك لأن الموقف الاقتصادى الناتج من النموذج يمكن تمثيله بواسطة لعبة غير صفرية مكونه من اشخاص عددهم ن ، واذا درسنا هذه اللعبة كنموذج للسلوك الاقتصادى لهؤلاء اللاعبين ، فاننا سنصل الى نتائج مختلفة عن النتائج التى نتوصل اليها من هذه الدراسة وذلك بسبب امكانية تكوين اتحادات بين اللاعبين ، وقد وجدنا عند محاولة استخدام برامج الحاسب الالكترونى المطبقة على البرامج الخطية لحل النموذج أنه من الضرورى أن نحول اللعبة التى تمثله الى برنامج خطى ، ولكن المشكلة التى تصادفنا هى أن هذه اللعبة دالة فى معدل النمو ، وأن قيمة اللعبة تساوى صفرا ، وقد امكننا استخدام نتائج مبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى لتحويل اللعبة الى برنامج خطى يسمح شكله الخاص بحل النموذج .

نلاحظ أن غالبية المواقف الاقتصادية تأخذ شكل لعبة مكونة من أكثر من شخصين وأن المدفوعات بين الأفراد من النادر أن تكون صفرية وذلك يجعلنا نهتم بدراسة اللعبة العامة المكونة من

* Cf. (6)

أشخاص عدد هم ن ذات المدفوعات الغير صفرية ، ويمكن أن يوجد في هذه اللعبة تـــوازى كلى أو جزئى فى المصالح بين الأفراد بالاضافة الى تضاد المصالح الذى يوجد طالما أن الصراع هو أحد المكونات الأساسية فى جميع الألعاب ، هذا التوازى فى المصالح يمكن أن يقود الـــى الاتحادات والتعويضات بين اللاعبين .

تحدد استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى مجموعة من القواعد لكل لاعب تبـين له كيف يتصرف فى كل موقف يمكن أن يوجد فيه ، ويحصل كل لاعب على قيمة النهاية الصغـــرى للنهايات العظمى الخاصه به على الأقل عند ما يلعب هذه الاستراتيجية . هذا النوع من السلوك يمكن أن يطبق فى الألعاب التى لا تلعب فيها الاتحادات والتعويضات بين اللاعبين أى دورهى التى تسمى الالعاب الغير أساسية inessential games ، ذلك أن القواعد المعبر عنها فى استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى لا تتوقع هذه الامكانات ، ولكـن مواقف الصراع الحقيقية التى نواجهها فى المجتمع لا يمكن أن تعالج بدون هذه الامكانـــات ، وذلك يجعلنا نهمل فكرة الاستراتيجية كحل للعبة العامة المكونة من أشخاص عدد هم ن .

وبتحليل اللعبة المكونة من ثلاثة أشخاص نجد بعكس اللعبة الثنائية الصفرية أن استراتيجيات النهاية الصغرى للنهايات العظمى هى استراتيجيات مركبة فى حالة المعلومات التامة ، كما نجـد أن حل اللعبة يتكون من نظام من التوزيعات وليس من توزيعة واحدة (قيمة النهاية الصغـــرى للنهايات العظمى) كما فى اللعبة الثنائية الصفرية ، ولكن هذا الحل يعتمد أيضا على قيمـــة النهاية الصغرى للنهايات العظمى للاعب (أو لمجموعة من اللاعبين) عند ما يلعب (أويلعبون) ضد الاتحاد المكون من اللاعبين الاخرين ، وتسمى هذه القيمة الدالة المميزة the charac-teristic function ، وتقوم على هذه الدالة دراسة جميع العناصر المتعلقـــة بالاتحادات بين اللاعبين والتعويضات التى تتم بين المتحدين فى تحالف معين وذلك بالرغـــم

من أنها تعرف بافتراض لعبة ثنائية صفرية بواسطة تكوينة نظرية ، أى أنها تبنى على أساس موقف افتراضى وليس على اللعبة الحقيقية المكونة من لاعبين عددهم ن ، ومن ناحية أخرى فأن الدالة المميزة تحدد العائد المتوقع بواسطة تحالف معين ولكنها لا تحدد كيف يمكن تقسيم هذا العائد بين المشتركين فى هذا التحالف ، ذلك أن هذا التقسيم يحدد بواسطة الامكانات المتاحة لكل لاعب فى تحالف معين أن ينضم الى هذا التحالف أو الى تحالف آخر كما سنرى فى الفصل الثالث .

وسوف تتكون هذه المذكرة من ثلاثة فصول ، نستعين فى الفصل الأول منها بلعبة البوكر كمثال لدراسة الخصائص الأساسية لاستراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى ، وسنخصص الفصل الثانى لتفسير نموذج ينومان للنمو الاقتصادى باستخدام مبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى ، ونوضح فى الفصل الثالث أن قيمة النهاية الصغرى للنهايات العظمى هى أساس دراسة اللعبة العامة المكونة من اشخاص عددهم ن ، وذلك فى محاولة لالقاء الضوء على الدور الذى يلعبه مبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى فى دراسة الألعاب الاستراتيجية .

١ • الفصل الاول

استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمـــــى

١ • ١ مقدمـــة

سوف نبدأ أولا بتعريف بعض الرموز والمفاهيم الاساسية المستخدمة فـــــــى المذكـــرة * :

تتحدد اللعبة م المكونة من لاعبين عددهم ن بالعناصر الآتيـــة :

أ) عدد ν يشير الى طول اللعبـــة .

ب) مجموعة محددة سـ تشير الى مجموعة المباريات Plays الممكنة فى م

حـ) عائد اللعبة π للاعب k : $F_k(\pi)$ حيث $k=1,\dots,n$ ، $\pi \in$ سـ

د) نموذج معلومات الحكم $\mathcal{A}_K$ the umpire's pattern of information ، وهو تجزئ** a partition فى سـ حيث $K=1,\dots,\nu,\nu+1$ ، $A_K \in \mathcal{A}_K$ تشير الى معلومات الحكم الحقيقيـــة the umpire's actual information. قبل الخطوة m_K مباشرة . (تشير $K=\nu+1$ الى نهاية اللعبة)

هـ) نموذج تحديد مواقع اللاعبين $\mathcal{B}_K$ the pattern of assignment، وهو تجزئ فى سـ ، وتتكون $\mathcal{B}_K$ من $n+1$ مجموعة $B_K(k)$ حيـــث $k=0,\dots,n$ ، $K=1,\dots,\nu$ ، $B_K(k) \in \mathcal{B}_K$ هو التحديد الحقيقى the actual assignment للخطوة m_K .

و) نموذج الاختيار $C_K(k)$ the pattern of choice وهو تجـــزئ

---

* لمزيد من التفاصيل انظر :
Makhluf Ibrahim, "Some tactical and economical games" a thesis for the degree of master in applied statistics, Faculty of Economics and Political Science, Cairo University, 1971.

** يقال أن A جزء من المجموعة B a subset اذا كان كل عنصر فى A هو أيضا عنصر فى B ، ويقال ان $\mathcal{A}$ تجزئ فى سـ اذا كان كل عنصر $A \in \mathcal{A}$ جزء من المجموعة سـ وغيرخالى ، وإذا كان $\mathcal{A}$ نظام من المجموعات المنفصلة بعضها عن بعض .

فى $B_K(k)$ حيث $K = 1, \ldots, 7$ ، $k = 1, \ldots, n$ ،

وتشير $C_K \in C_K(k)$ الى الاختيار الحقيقى the actual choice

للاعب k (أو للصدفة اذا كانت $k = 0$) فى الخطوة m_K .

ز) نموذج معلومات اللاعب $\mathcal{D}_K(k)$ ، وهو تجزىء فى $B_K(k)$

حيث $K = 1, \ldots, 7$ ، $k = 1, \ldots, n$ ، $D_K \in \mathcal{D}_K(k)$ تشير الى المعلومات

الحقيقية للاعب k فى الخطوة m_K .

ح) احتمال الاختيار الحقيقى C_K فى الخطوة العشوائية m_K : $P_K(C_K)$.

تربط هذه العناصر العلاقات الآتيــة :

١ـ $\mathcal{A}_K$ جزء من التجزىء* $\mathcal{B}_K$ a subpartition ، أى أن نمـــــوذج معلومات الحكم فى الخطوة m_K يتضمن تحديد مواقع اللاعبين فى هذه الخطوة.

٢ـ $C_K(0)$ جزء من التجزىء $\mathcal{A}_K$ ، أى ان نموذج الاختيار العشوائى فـــى الخطوة العشوائية the chance move m_K يتضمن نمــــوذج معلومات الحكم فى هذه الخطــوة .

٣ـ $C_K(k)$ جزء من التجزىء $\mathcal{D}_K(k)$ حيث $k = 1, \ldots, n$ ، أى أن نموذج الاختيار فى الخطوة الشخصية the personal move m_K للاعب k يتضمن نموذج معلومات اللاعب فى هذه الخطوة .

٤ـ $\mathcal{A}_K$ جزء من التجزىء $\mathcal{D}_K(k)$ داخل $B_K(k)$ ، أى ان نمـــــوذج معلومات الحكم فى الخطوة m_K يتضمن نموذج معلومات اللاعب k فى هــذه الخطوة .

---

* اذا كان لدينا تجزيئين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}$ فان $\mathcal{A}$ جزء من التجزىء $\mathcal{B}$ اذا كـان كل عنصر $A \in \mathcal{A}$ هو جزء من $B \in \mathcal{B}$.

٥- $\sum P_K(C_K) = 1$ ، $P_K(C_K) \geqslant 0$ وذلك لكل $K = 1, \ldots, \nu$ ، $A_K \in \mathcal{A}_K$
التى تعتبر جزء من المجموعة $B_K(0)$ ولكل $C_K \in \mathcal{C}_K(0)$ التى تعتبر جزء من A_K .

٦- $\mathcal{A}_1$ تتكون من مجموعة واحدة Ω ، أى ان نموذج معلومات الحكم فى الخطوة الاولى خالى void .

٧- $\mathcal{A}_{\nu+1}$ تتكون من مجموعات وتتكون كل مجموعة منها من عنصر واحد ، أى أن نظام معلومات الحكم فى نهاية المباراة يحددها تحديدا كاملا .

٨- يمكن الحصول على $\mathcal{A}_{K+1}$ من $\mathcal{A}_K$ بتقاطع عناصر $C_K(k)$ مع عناصر $\mathcal{A}_K$ حيث $k = 0, 1, \ldots, n$ و $K = 1, \ldots, \nu$ أى ان نموذج معلومات الحكم فى الخطوة $\mathcal{M}_{K+1}$ ($K = \nu$ تشير الى نهاية اللعبة) نحصل عليه من النموذج فى الخطوة $\mathcal{M}_K$ بتقاطعه مع نموذج الاختيار فى الخطوة $\mathcal{M}_K$.

٩- يجب ألا يكون التقاطع $A_K \cap C_K$ خاليا حيث $K = 1, \ldots, \nu$ وذلك اذا كانت $A_K \in \mathcal{A}_K$ ، $C_K \in \mathcal{C}_K(k)$ اجزاء من نفس المجموعات $D_K \in \mathcal{D}_K(k)$ ، $k = 1, \ldots, n$.

ويعنى ذلك انه اذا اعتبرنا الخطوة $\mathcal{M}_\nu$ خطوة شخصية للاعب k واعتبرنا نموذج المعلومات الحقيقى لهذا اللاعب فى هذه الخطوة فان المعلومات الحقيقية للحكم فى هذه الخطوة والاختيار الحقيقى للاعب k يتوافقان معا ويحدثان فى ألعاب حقيقية .

١٠- أحد عناصر المجموعة $C_K(k) \in \mathcal{C}_K$ التى تعتبر جزء من المجموعة $D_K \in \mathcal{D}_K(k)$ يجب ان يتحقق وذلك لكل $k = 1, \ldots, n$ ، $K = 1, \ldots, \nu$
أى أن نموذج الاختيارات الحقيقية المتاحة أمام اللاعب يجب ألا يكون خاليا .

١ . ٢ ـ مفهوم الاستراتيجية The concept of a strategy

تعرف استراتيجية اللاعب k بالدالة $\Sigma_k(k, D_k) = C_k$ وذلك لكل خطوة $k = ١ ، . . . ، ٧$ ولكل مجموعة معلومات $D_k \in \mathcal{D}_k(k)$ حيث $C_k \in \mathcal{C}_k(k)$ ، ويعرف اختيار الحكم بالدالة $\Sigma_0(k , A_k) = C_k$ وذلك لكل خطوة $k = ١ ، . . . ، ٧$ ولكل $A_k \in \mathcal{A}_k$ التى تعتبر جزء من المجموعة $B_k(0)$ حيث $C_k \in \mathcal{C}_k(0)$.

ويحدد السير الفعلى للمباراة استراتيجية معينة مختارة بواسطة كل لاعب واختيار محدد للحكم وسنرمز الى جميع استراتيجيات اللاعب k بالرمز:

$$\Sigma_k^1 , \ldots , \Sigma_k^{T_k} , \ldots , \Sigma_k^{\beta_k}$$

وسنرمز الى اختيار الحكم بالرمز :

$$\Sigma_0^1 , \ldots , \Sigma_0^{T_0} , \ldots , \Sigma_0^{\beta_0} .$$

يحدد المباراة $\bar{\pi}$ ونتيجتها $F_k(\bar{\pi})$ لكل لاعب اختيار محدد من استراتيجيات اللاعبين واختيار للحكم ، ويمكن أن نكتب الآن :

$$F_k = G_k(T_0 , T_1 , \ldots , T_n) , \quad k = 1 , \ldots , n .$$

وبناء على ذلك يمكن أن نصف المباراة بواسطة اختيار كل لاعب للاستراتيجية T_k حيث $T_k = ١ ، . . . ، \beta_k$ واختيار الصدفة للاستراتيجية T_0 حيث $T_0 = 1 , \ldots , \beta_0$ بالاحتمالات $p^1 , \ldots , p^{\beta_0}$ على الترتيب ، والتوقع الرياضى لمكسب اللاعب k هو :

$$H_k(T_1 , \ldots , T_n) = \sum_{T_0 = 1}^{\beta_0} p^{T_0} \, G_k(T_0 , \ldots , T_n)$$

وبصفة عامة فان عناصر اللعبة Γ المكونة من لاعبين عددهم ن تحدد بواسطة الاستراتيجيات β_k حيث $k = ١ ، . . . ، n$ وذلك بدلالة دوال المدفوعات

$$H_k = H_k(T_1 , \ldots , T_n) \qquad T_j = ١ ، . . . ، \beta_j ، \; j = ١ ، . . . ، n$$

والسير الفعلى للمباراة يتلخص فى ان كل لاعب k يختار العدد β_k، ...، $T_k = 1$، بدون معرفة اختيارات اللاعبين الآخرين ، والعائد المتوقع للمباراة للاعب k هو :

$$H_k(T_1, \dots, T_n)$$

وتكون اللعبة صفرية اذا كان :-

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(\pi) = 0 \quad \text{أو} \quad \sum_{k=1}^{n} H_k(T_1, \dots, T_n) = 0$$

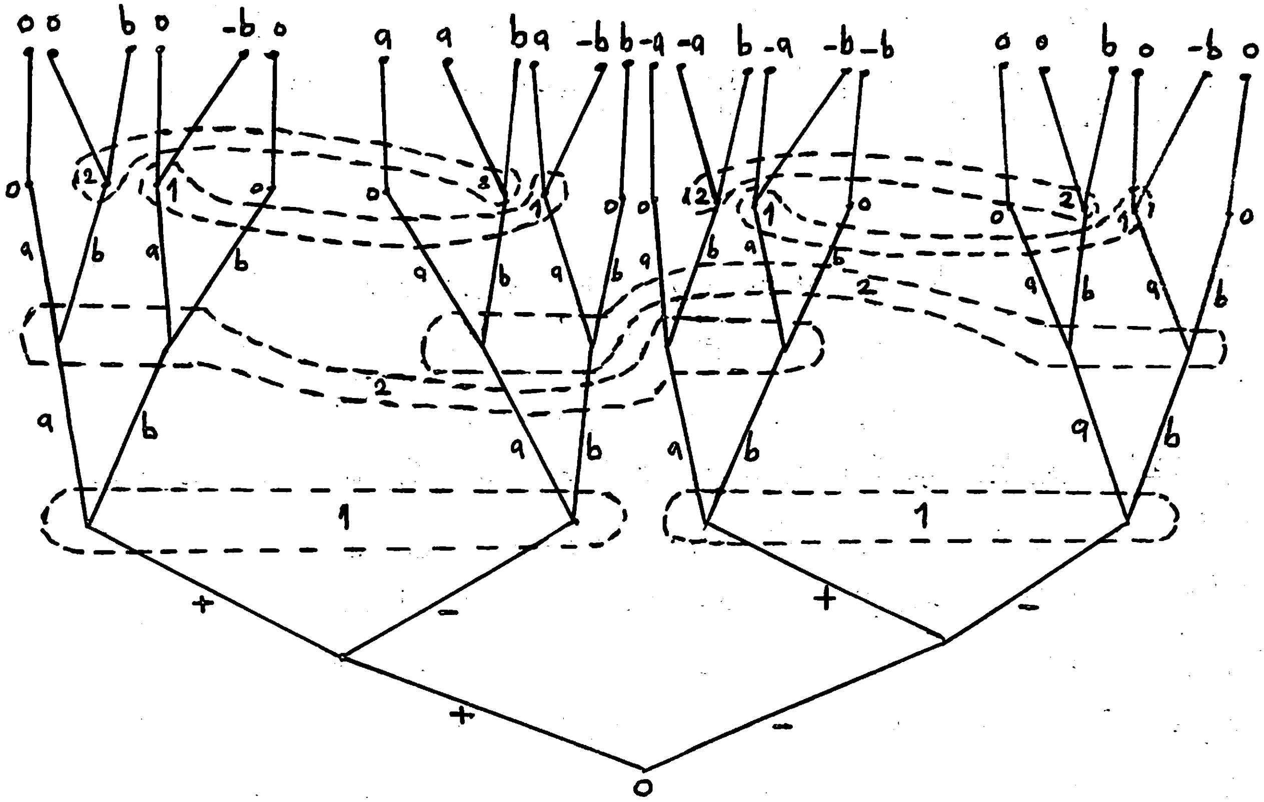
يسمى هذا التصميم النهائى بواسطة الاستراتيجيات الشكل الطبيعى the normalized form للعبة بينما يسمى الوصف العام الذى يوضح تتابع القرارات الأولية للاعبين الشكل المكثف the extensive form للعبة .

٣٠١ـ مثال : لعبة البوكر :

سوف نستعين فى هذا الفصل بلعبة البوكر وذلك كمثال لتوضيح مفهوم الاستراتيجية ولدراسة الخصائص الأساسية لمبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى .

تشير قواعد لعبة البوكر الى أن كل لاعب سوف يحصل بواسطة خطوة عشوائية على عدد $s = 1, \dots, S$ باحتمال $\frac{1}{S}$ ، وسنرمز الى يد اللاعب الأول بالرمز s_1 و يد اللاعب الثانى بالرمز s_2 ، ثم يختار اللاعب بأن يراهن بـ a أو b حيث $a > b > 0$ وهو يعرف يده ولكن لا يعرف يد خصمه ، فاذا اختار لاعب a واختار الآخر b فان اللاعب الذى يختار b يطلب أن يكشف الأيدى أو ينسحب ، واذا اختار اللاعبان a أو اذا اختار احدهما a والآخر b وطلب أن يكشف الأيدى فان اللاعب الأول يحصل من اللاعب الثانى على $\begin{matrix} a \\ 0 \\ -a \end{matrix}$ اذا كانت $s_1 \gtreqless s_2$ على الترتيب ، واذا اختار اللاعبان b فان اللاعب الأول يحصل من اللاعب الثانى على الكمية $\begin{matrix} b \\ 0 \\ -b \end{matrix}$ اذا كانت $s_1 \gtreqless s_2$ على الترتيب ،واذا اختار لاعب a والاخر b ثم انسحب ، فان اللاعب الذى اختار a سوف يحصل على b من اللاعب الآخر .

نفرض الآن أن يد اللاعب ستكون اما كارتا عاليا (أحمر) او كارتا منخفضا (اسود) ، وسنستعين بفكرة الشجرة * the tree لرسم اللعبة كالتالى :



* Cf.(3), 28, PP. 194 - 199.

تمثل الخطوة الأولى اعطاء كارت للاعب الاول وستكون نتيجة هذه الخطوة اما كارتا عاليا أو كارتا منخفضا بتوزيع احتمالى (½ ½)، سنرمز للكارت العالى بالرمز + وللمنخفض بالرمز -

وتمثل الخطوة الثانية اعطاء كارت ل k_2 وتحسب نتيجة هذه الخطوة مع نتيجة الخطوة الأولى أى ان هذه النتيجة ستكون اما كارتا عاليا للاعبين أو كارتا عاليا لأحدهما وكارتا منخفضا للآخر بتوزيع احتمالى (¼ ¼ ¼ ¼) . يعلم كل لاعب الآن يده ولكنه لا يعلم يد خصمه وسيكون k_1 الذى يلعب الخطوة الثالثة فى أحد المواقع الآتيــة : (+ +) . (+ -) (- +) , (- -)

حيث تشير العلامة اليسرى الى يد k_1 وتشير اليمنى الى يد k_2 ، تمثل الخطوة الرابعة خطوة شخصية ل k_2 الذى يعلم أنه فى أحد المواقع :

(+ +) , (- +) (+, -) , (- -)

كما هو مبين بالرسم ، ويمكن بنفس الطريقة تكملة الرسم وكتابة مكسب k_1 فى نهاية كل مباراة ممكنة ، ونلاحظ فى هذه اللعبة انه يوجد 2^4 مباراة ممكنة ممثلة ب 24 فرع من فروع الشجرة ، وقد اكملنا 8 مباريات ببديل يحدث باحتمال واحد فى المواقع التى تنتج من نفس المراهنة للاعبين حتى تتساوى أطوال ال 24 مباراة الممكنة فاذا طبقنا التصميم السابق على هذه اللعبة فاننا نجد ان هناك 1, 2, 4, 8, 16 , مجموعة من A_K فى الخطوات m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 على الترتيب وان m_3 تحتوى على مجموعة $B_3(1)$ من أربعة عناصر تمثل جميع المجموعات A_3 وأن $B_3(1)$ متوافقة مع B_3 وبالمثل تحتوى m_4 على مجموعة واحدة $B_4(2)$ مكونة من 16 عنصر تمثل جميع العناصر A_4 وفى m_5 تحتوى $B_5(1)$ على 4 عناصر A_5 وتحتوى $B_5(2)$ على 4 عناصر A_5 ، ويوجد فى m_1 مجموعة $B_1(0)$ مكونة من عنصر واحد A_1 ، وبديلين : $a_1(1)$, $a_1(2)$

ويوجد فى m_2 مجموعة $B_2(o)$ مكونة من عنصرين A_2 وبديلين فى كل A_2 و $a_2(1)$ و $a_2(2)$ ويوجد فى كل مجموعة A_2 التوزيع الاحتمالى : $(½ \ ½)$ وتوجد مجموعتان C_1 فى m_1 ومجموعتان C_2 فى كل A_2 فى m_2 ، وتوجد فى m_3 مجموعتان D_4 تمثلان توزيع المعلومات لـ k_2 ويوجد فى m_5 مجموعتان D_5 لكل لاعب . وتلاحظ فى النهاية انه يوجد 8 مجموعات C_3 و 16 مجموعة C_4 و 24 مجموعة C_5 .

ولتحديد الاستراتيجية سنعرف ثلاثة بدائل ممكنة لكل لاعب فى مباراة معينة : المراهنة بـ a ثم طلب أن يكشف الأيدى ، المراهنة بـ b ثم طلب ان يكشف الايدى (اذا كان لديه الفرصة لذلك) والمراهنة بـ b ثم طلب أن ينسحب (اذا كان لديه الفرصة لذلك) ، وسنرمز لهذه البدائل بالرمز $i=1,2,3,$ للاعب الاول ، $j=1,2,3,$ للاعب الثانى ، وبالتالى فان لدينا 9 تكوينات ممكنة :

(1,1) , (2,2), (3,3) ,(1,2) , (1,3) , (2,1) , (2,3) , (3,1), (3,2)

حيث يمثل العدد الايسر تصرف اللاعب اذا كان معه كارت عالى ويمثل العدد الأيمن تصرفه اذا كان معه كارت منخفض ، فمثلا اذا قرر k_1 انه سيلعب الاستراتيجية (2,3) فانه سوف يراهن بـ b فى m_3 ثم يطلب أن يكشف الأيدى فى m_5 اذا كان معه كارت عالى وسيراهن بـ b فى m_3 ثم ينسحب فى m_5 اذا كان معه كارت منخفض، واذا اختار k_1 الاستراتيجية (2,3) واختار k_2 الاستراتيجية (1,3) واختار الحكم (+ —) فان العائد المتوقع لـ k_1 هو b والعائد المتوقع لـ k_2 هو $-b$ ، تكون الاستراتيجية (2,3) لـ k_1 مع الاستراتيجية (1,3) لـ k_2 أربع مباريات ممكنة ويحدد اختيار الصدفة المباراة التى تلعب حقيقة ، ونرى من ذلك ان العائد الناتج من هذه المباريات هو o أو $-b$ و b و o بحسب ما اذا كان الحكم سيختار (— —) أو (+ —) و (— +) و (+ +) على الترتيب ويكون التوقع

الرياضي لـ k_1 : ¼ (0) + ¼ (b) + ¼(-b) + ¼ (6)

وبالمثل يمكن تكوين مصفوفة المدفوعات لـ k_1 وذلك بمقابلة استراتيجيات k_1 مع استراتيجيات k_2 كالتالي :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} & & + \\ + & - & - \end{array} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & b & 0 & \frac{2b-a}{4} & 0 & \frac{2b-a}{4} & \frac{2b+a}{4} & \frac{2b+a}{4} \\
0 & 0 & 0 & \frac{b-a}{4} & \frac{b-a}{4} & \frac{a-b}{4} & 0 & \frac{a-b}{4} & 0 \\
-b & 0 & 0 & \frac{-b}{4} & \frac{-b}{4} & \frac{-3b}{4} & 0 & \frac{-3b}{4} & 0 \\
0 & \frac{a-b}{4} & \frac{b}{4} & 0 & \frac{b-a}{4} & \frac{a-b}{4} & 0 & \frac{a}{4} & \frac{a}{4} \\
\frac{a-2b}{4} & \frac{a-b}{4} & \frac{b}{4} & \frac{a-b}{4} & 0 & \frac{a-2b}{4} & 0 & \frac{a-b}{4} & \frac{a}{4} \\
0 & \frac{b-a}{4} & \frac{3b}{4} & \frac{b-a}{4} & \frac{2b-a}{4} & 0 & \frac{2b-a}{4} & \frac{a+b}{4} & \frac{2b}{4} \\
\frac{a-2b}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2b+a}{4} & 0 & \frac{a-2b}{4} & 0 \\
-\frac{2b-a}{4} & \frac{b-a}{4} & \frac{3b}{4} & \frac{-a}{4} & \frac{b-a}{4} & \frac{-b-a}{4} & \frac{2b-a}{4} & 0 & \frac{2b}{4} \\
-\frac{2b-a}{4} & 0 & 0 & \frac{-a}{4} & \frac{-a}{4} & -\frac{2b}{4} & 0 & -\frac{2b}{4} & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

ونلاحظ بصفة عامة أنه من السهل تصميم ا لشكل الطبيعى للعبة الثنائية ولكـــن تعميم هذا الشكل للعبة المكونة من لاعبين عددهم ن يتطلب جدولا له مدخل لكل لاعب ويقود ذلك الى مصاعب عملية كبيرة ، ويمكن ان يكون تصميم الشكل الطبيعى للعبة مستحيلا عندما يكون عدد الخطوات وعدد الاستراتيجيات المتاحة امام كل لاعب كبيرا حتى فـــى حالة اللعبة الثنائية ، فقد استطعنا مثلا تصميم الشكل الطبيعى للبوكر مع افتراض أن $s = 2$ ولكن اذا فرضنا أن اللاعب يسحب 5 كروت من كوتشينة مكونة من 52 كارت فان عـــدد التكوينات الممكنة من الأيدى يكون :

$$S = C_5^{52} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2,598,960$$

ويصبح تصميم الشكل الطبيعى للعبة مستحيلا .

١٠٤ ــ ملاحظات عامة على استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى ؛

سنعتبر الشكل الطبيعى للعبة Γ التى يمتلك فيها k_1 عدد β_1 مــــــن الاستراتيجيات البسيطة حيث $T_1 = 1, \ldots, \beta_1$ ويمتلك k_2 عدد β_2 من الاستراتيجيات البسيطة حيث $T_2 = 1, \ldots, \beta_2$ ويتكون كل دور من أدوار اللعبة من خطوتين : يختار k_1 فى الخطوة الأولى الاستراتيجية T_1 ويختار k_2 فى الخطوة الثانية الاستراتيجية T_2 مع عدم معرفته باختيار k_1 . سنفرض أن $H(T_1, T_2) = H_1(T_1, T_2)$ هو العائد المتوقع لـ k_1 وأن $H_2(T_1, T_2)$ هو العائد المتوقع لـ k_2 ، فاذا كانت اللعبة صفرية فان $H_2(T_1, T_2) = -H(T_1, T_2)$.

يرغب k_1 فى تعظيم عائده المتوقع ولكنه يتحكم فى اختيار استراتيجيته T_1 بينمـــا يرغب k_2 فى جعل العائد المتوقع لـ k_1 اقل ما يمكن ولكنه يتحكم فى اختيـــار استراتيجيته T_2 ، وفى هذه الحالة فان k_1 يختار T_1 وهو متوقع أن k_2 سيختار T_2 بطريقة تجعل $H(T_1, T_2)$ نهاية صغرى ، اى أن التوقع الرياضـــى للاعب الأول هـــو :

$$V_1 = \max_{T_1} \min_{T_2} H(T_1, T_2)$$

ومن ناحية اخرى فان k_2 يختار T_2 وهو متوقع أن k_1 سيختار T_1 بطريقة تجعل $H(T_1, T_2)$ نهاية عظمى ، أى أن التوقع الرياضى للاعب الأول فى هذه الحالة هو :

$$V_2 = \min_{T_2} \max_{T_1} H(T_1, T_2)$$

وبصفة عامة فان

$$V_1 \leqslant V_2$$

وذلك لأن :

$$\max_{T_1} \min_{T_2} H(T_1, T_2) = \min_{T_2} H(T_1^*, T_2) \leqslant H(T_1^*, T_2^*)$$
$$\leqslant \max_{T_1} H(T_1, T_2^*) = \min_{T_2} \max_{T_1} H(T_1, T_2)$$

١٠٤٠١ : طبيعة الاستراتيجية ونظام المعلومات :

يلاحظ انه اذا كانت اللعبة ذات معلومات تامة Perfect information

اي اذا كان اللاعب الذى يلعب خطوة شخصية يعلم تماما جميع ما تم فى المباريات قبل هذه الخطوة فان استراتيجيات النهاية الصغرى للنهايات العظمى ستكون الاستراتيجيات البسيطة the pure strategies T_1^* و T_2^* بحيث ان :

$$V_1 = V_2 = H(T_1^*, T_2^*) = V$$

حيث V تمثل قيمة اللعبة the value of the game

ويمكن اثبات هذه النظرية بطريقة الاستنتاج the induction على طول اللعبة ، فذلك واضح فى حالة اللعبة ذات الخطوة الواحدة ، وسنفرض انه صحيح لجميع الالعاب التى طولها أقل من ν ، وسنفرض لعبة طولها ν وأن عدد البدائل فى m_1 هو α_1 ، وسنفرض أن $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\sigma}, \ldots, \Gamma_{\alpha_1}$ هى

الألعاب التي عددها α_1 التي تتكون اذا حذفنا m_1 والتي تكون فيها دالـــة المدفوعات هي نفس دالة المدفوعات في اللعبة Γ .

من الفرض نجد أنه يوجد استراتيجية بسيطة مثالية* في كل لعبة Γ_{σ_1} ، و $\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$ معرفة بواسطة $T^*_{2\sigma_1}$ و $T^*_{1\sigma_1}$ ، وسنفرض أن $H_1(T_{1\sigma_1}, T_{2\sigma_1})$ العائد المتوقع في الألعاب Γ_{σ_1} حيث $\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$ وسنكتب :

$$H_{\sigma_1}(T^*_{1\sigma_1}, T^*_{2\sigma_1}) \geqslant H_{\sigma_1}(T_{1\sigma_1}, T^*_{2\sigma_1}) \quad \text{و} \qquad (1)$$

$$H_{\sigma_1}(T^*_{1\sigma_1}, T^*_{2\sigma_1}) \leqslant H_{\sigma_1}(T^*_{1\sigma_1}, T_{2\sigma_1}) . \qquad (2)$$

فاذا كانت m_1 خطوة عشوائية فان كل مواقع m_2 تكون ممكنة ، واذا اعتبرنا الشكـــل الطبيعي للعبة Γ والأشكال الطبيعية للألعاب Γ_{σ_1} حيث $\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$ فاننا نجد أن كل عنصر في Γ يقابله عنصر في كل من $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\alpha_1}$ مع الأخــذ في الاعتبار الاحتمال المرتبط بعناصر هذه الألعاب ، ومن ذلك نرى أن :

$$H(T^*_1, T^*_2) = \sum_{\sigma_1} P(\sigma_1) H_{\sigma_1}(T^*_{1\sigma_1}, T^*_{2\sigma_1}) , \qquad (3)$$

$$H(T^*_1, T_2) = \sum_{\sigma_1} P(\sigma_1) H_{\sigma_1}(T^*_{1\sigma_1}, T_{2\sigma_1}) , \qquad (4)$$

$$H(T_1, T^*_2) = \sum_{\sigma_1} P(\sigma_1) H_{\sigma_1}(T_{1\sigma_1}, T^*_{2\sigma_1}) \qquad (5)$$

وحيث أن $P(\alpha_1), \ldots, P(1)$ غير سالبة فاننا يمكن أن نعيد كتابة (2) و (1) في الصورة :

---

* الاستراتيجية المثالية هي استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى .

$$\sum_{\sigma_1} P(\sigma_1) H_{\sigma_1}(T^*_{1\sigma_1}, T^*_{2\sigma_1}) \geqslant \sum_{\sigma_1} P(\sigma_1) H_{\sigma_1}(T_{1\sigma_1}, T^*_{2\sigma_1}),$$

$$\sum_{\sigma_1} P(\sigma_1) H_{\sigma_1}(T^*_{1\sigma_1}, T^*_{2\sigma_1}) \leqslant \sum_{\sigma_1} P(\sigma_1) H_{\sigma_1}(T^*_{1\sigma_1}, T_{2\sigma_1}).$$

وبالتعويض من (5) ,(4) , (3) فى (7) ,(6) نجد أن :

$$H(T_1^*, T_2^*) \geqslant H(T_1, T_2^*), \tag{8}$$

$$H(T_1^*, T_2^*) \leqslant H(T_1^*, T_2). \tag{9}$$

واذا كانت m_1 خطوة شخصية فاننا نبحث ايضا عن علاقة التقابل بين عناصر مصفوفات المدفوعات للألعاب Γ_{σ_1} حيث $\sigma_1 = 1, \dots, \alpha_1$ وعناصر مصفوفة اللعبة Γ ونجد أن :

$$H(T_1^*, T_2^*) = H_{\sigma_1}(T_1^*, T_2^*), \tag{10}$$

$$H(T_1, T_2^*) = H_{\sigma_1}(T_1, T_2^*), \tag{11}$$

$$H(T_1^*, T_2) = H_{\sigma_1}(T_1^*, T_2). \tag{12}$$

وبالتعويض من (12) - (10) فى (2) , (1) نجد أن :

$$H(T_1^*, T_2^*) \geqslant H(T_1, T_2^*), \tag{13}$$

$$H(T_1^*, T_2^*) \leqslant H(T_1^*, T_2) \tag{14}$$

اما اذا كانت اللعبة ذات معلومات غير تامة imperfect information اى اذا كان اللاعب الذى يلعب خطوة شخصية يجهل نتيجة خطوة على الأقل من الخطوات السابقة فاننا نجد بصفة عامة أن :

$$\max_{T_1} \min_{T_2} H(T_1, T_2) < \min_{T_2} \max_{T_1} H(T_1, T_2)$$

وفي هذه الحالة فاننا نعرف توزيعا احتماليا على مجموعة الاستراتيجيات البسيطة للاعب ، ويعرف هذا التوزيع بالاستراتيجية المركبة the mixed strategy ، وتتكون اللعبة الآن من اختيار استراتيجية مركبة بواسطة كل لاعب مع عدم معرفة اختيار الخصم ، وسنرمز الى استراتيجيات k_1, k_2 بالمتجهات $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ على الترتيب بحيث أن :

$$\sum_{T_1=1}^{\beta_1} \xi_{T_1} = 1 , \sum_{T_2=1}^{\beta_2} \eta_{T_2} = 1 , \xi_{T_1} \geqslant 0 , \eta_{T_2} \geqslant 0$$

وسنكتب العائد المتوقع لـ k_1 فى الصورة :

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{T_1=1}^{\beta_1} \sum_{T_2=1}^{\beta_2} H(T_1, T_2)\, \xi_{T_1} \eta_{T_2}$$

وسنرمز الى استراتيجيات النهاية الصغرى للنهايات العظمى بالمتجهات $\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*$ بحيث أن :

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*) = V$$

حيث V تمثل قيمة اللعبة .

۱ ۰ ٤ ۰ ۲ : استراتيجيات السلوك Behavior strategies

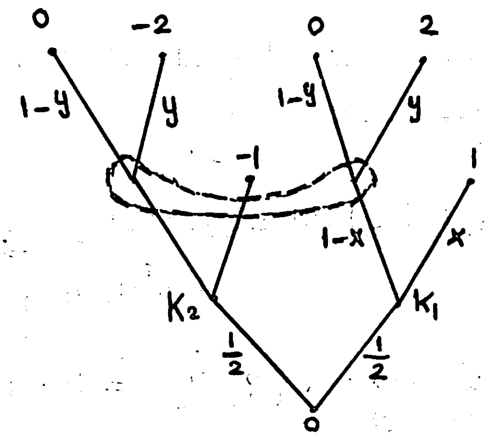
يلاحظ فى لعبة البوكر ان عدد الاستراتيجيات البسيطة المتاحة امام كل لاعب هو 3^S حيث S تمثل عدد التكوينات الممكنة من الايدى للاعب وبالتالى فان حجم dimension الاستراتيجيات المركبة هو $3^S - 1$ ، ولكننا نجد أن حجم الاستراتيجيات المركبة سوف يقل الى $2S$ فى الشكل المكثف للعبة ، ويلاحظ أن $3^S - 1$ اكبر بكثير من $2S$ وكلما كانت S كبيرة كلما كان الفرق بين $3^S - 1$ و $2S$ كبيرا ، وعموما فان حجم الاستراتيجيات المعرفة على الشكل المكثف للعبة

---

* Cf. (10) PP. 128 - 155.

أقل بكثير من حجمها على الشكل الطبيعى لها ، ويقودنا ذلك الى البحث عن إستراتيجيات النهاية الصغرى للنهايات العظمى على كل مجموعة معلومات فى الشكل المكثف للعبة ، وتعرف هذه الاستراتيجيات باستراتيجيات السلوك ، ولكنها لا تستخدم الا اذا كانت قواعد اللعبة فى أى خطوة شخصية تسمح للاعب الذى يلعب هذه الخطوة بأن يتذكر سلوكه فى الخطوات السابقة .

سنفرض على سبيل المثال اللعبة المعبر عنها بالرسم التالى حيث نوضح استراتيجيات السلوك للاعب الأول :



الشكل الطبيعى للعبة هو :

$$\begin{array}{cc} & \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(نلاحظ ان 1 تشير للبديل الأيسر و 2 للبديل الأيمن)

نستنتج من ذلك أن :

$$\vec{\xi}^{*} = \left(0 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \right) \quad , \quad V = \tfrac{1}{4}$$

التوقع الرياضي للاعب الأول اذا استخدم استراتيجية السلوك ضد الاستراتيجية البسيطة للاعب الثاني هو :

$$\tfrac{1}{2}\, x + 2y\,(1-x) \quad + \tfrac{1}{2}\,(-2)\, y = \tfrac{1}{2}X - xy$$

اذا استخدم اللاعب الثانى الاستراتيجية البسيطة الأولى :

$$\tfrac{1}{2}\, X + 2y\,(1-x) \quad + \tfrac{1}{2}\,(-1) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}X + y - xy$$

اذا استخدم اللاعب الثانى الاستراتيجية البسيطة الثانية ٠

ويمكن للاعب الاول ان يتأكد اذا استخدم استراتيجية السلوك ان يحصل على الأقل على :

$$\max_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} \min \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x + y - xy \;,\; \tfrac{1}{2}X - xy \right)$$

ومنها نجد أن :

$$x = 0, \;,\; y = \tfrac{1}{2} \;,\; V = 0$$

اى ان اللاعب الاول يتوقع أن يحصل على عائد اكبر اذا استخدم الاستراتيجية المركبة على الشكل الطبيعى للعبة وذلك لان قواعد اللعبة لا تسمح له بأن يتذكر فى $\mathfrak{M}_3$ اختياره فى $\mathfrak{M}_2$ ٠

١٠٤٠٣ـ الاستراتيجية كأساس للوفاق بين اللاعبين :

يلاحظ أن مبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى يمكن أن يقبل بواسطة الخصمين كأساس لحل صراعهما وذلك عندما يكون لديهما الامكانية والرغبة لذلك ، هذا الاساس يمكن أن يبنى على تقدير الموقف بينهما فى الشكل الطبيعى للعبة وبواسطة معرفة استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى وقيمة اللعبة ، هذه الملاحظة نجد

انها تتفق مع الطريقة الرياضية للتقريب المتتالي لبرون روبنسون* للحصول على استراتيجية النهاية الصغري للنهايات العظمى وقيمة اللعبة عند اللعب عدد كبير من المرات ، ونستنتج من ذلك انه عندما تلعب اللعبة بصورة متكررة ولفترة طويلة نسبيا فان سلوك اللاعبين يتجه الى نقطة توازن معرفة بواسطة استراتيجيات النهاية الصغرى للنهايات العظمى ، وتمثل هذه النقطة حل وفاق مقبول ومعقول بينهما ، فاذا اعتبرنا جدول التقريب المتتالى الآتى :

N	$T_1(N)$	$K_1(N)$ ... $K_{T_2}(N)$	$\underline{V}(N)$	$T_2(N)$	$H_1(N)$ ... $H_{T_1}(N)$	$\bar{V}(N)$	$\bar{V}(N)-\underline{V}(N)$

حيث $T_1(N)$ تشير الى استراتيجية اللاعب الأول فى الخطوة N ،

$T_2(N)$ تشير الى استراتيجية اللاعب الثانى فى الخطوة N ،

$$K_{T_2}(N) = \sum H\left[T_1(n) \;, T_2\right] \;,$$

$$H_{T_1}(N) = \sum H\left[T_1 \;, T_2(n)\right] \;;$$

$$\underline{V}(N) = \frac{1}{N} \min_{T_2} K_{T_2}(N) \;,$$

$$\bar{V}(N) = \frac{1}{N} \max K_{T_1}(N) \;.$$

---

* Cf. (5) , Vol 1, PP. 179 - 189.

فاننا نجد من التقريب أن :

$$\text{أصغر قيمة ل} \quad \bar{V}(N) \leqslant V \leqslant \text{اكبر قيمة ل} \quad \underline{V}(N)$$

ونحصل على الاستراتيجية المثلى للاعب الأول بتحديد تكرار استراتيجياته البسيطة خلال الخطوات التى تحقق له اكبر قيمة ل $\underline{V}(N)$

وبالمثل نحصل على الاستراتيجية المثلى للاعب الثانى بتحديد تكرار استراتيجياته البسيطة خلال الخطوات التى تحقق له أصغر قيمة ل $\bar{V}(N)$ ، وبصفة عامة فان :

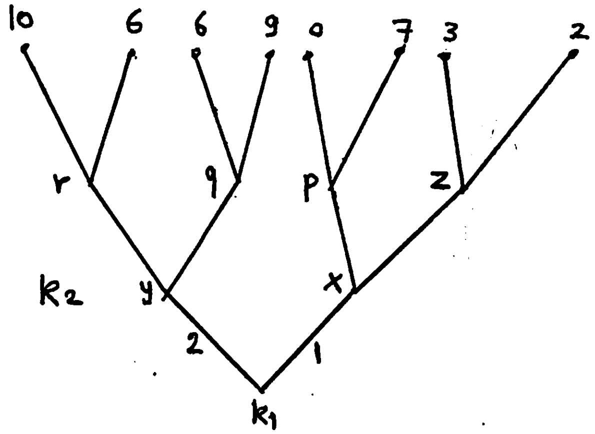
$$\lim_{N \to \infty} \vec{\xi}(N) = \vec{\xi}^{*} \quad , \quad \lim_{N \to \infty} \vec{\eta}(N) = \vec{\eta}^{*} .$$

٤٠٤٠١ـ نحو نظرية ديناميكية للألعاب :

تعتبر نظرية الالعاب بصفة اجمالية نظرية استاتيكية حيث أنها تدرس توازنا ليس له اتجاه ان يتغير أى أنها لا تقود الى تطورات ديناميكية ، وليس هناك شك في أن نظرية ديناميكية سوف تكون اكثر اكتمالا واكثر تفضيلا ، وقد لاحظنا أن اللاعب يمكن أن يكون من مصلحته أن يمر من نظام للمعلومات الغير تامة الى نظام للمعلومات التامة وأن يجعل خصمه يمر من نظام المعلومات التامة الى نظام للمعلومات الغير تامة ، وبعبارة أخرى فان الموقف الاستراتيجى للاعب k يمكن أن يكون افضل عندما يزيد عدد D_K فى كل $\mathcal{D}_K(k)$ وعندما ينخفض عدد D_K فى كل $\mathcal{D}_K(\bar{k})$ لخصمه $\bar{k}$ ، وبالتالى فانه يمكن تقدير ما اذا كان ثمن المعلومات التى يمكن ان يحصل عليها اللاعب او ثمن المجهود المطلوب عمله للتشويش على خصمه ذات فعالية بالقياس الى الفرق بين قيمتى النهاية الصغرى للنهايات العظمى فى الموقفين ، من المفهوم طبعا أن نظام المعلومات يعتبر احد عناصر اللعبة الثابتة ولكننا نبحث عما اذا كانت هناك دوافع لتعديل هذا النظام وبالتالى لتعديل قواعد اللعبة بواسطة اللاعبين أم لا .

لتوضيح ذلك سنتناول المثال الاتى الذى يفترض اربع حالات ممكنة بحسب معلومات اللاعب :

الحالة الاولى : سنفرض اللعبة ذات المعلومات التامة الممثلة بالرسم التالى :



الشكل الطبيعى لهذه اللعبة هو:

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & x & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 & y & 1 & 2 & 2 & 1 \\
\hline
\begin{matrix} z \\ p \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & 2 & 7 & 7 & 2 \\
\begin{matrix} z \\ p \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} & 3 & 0 & 0 & 3 \\
\begin{matrix} z \\ p \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & 2 & 0 & 0 & 2 \\
\begin{matrix} z \\ p \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} & 3 & 7 & 7 & 3 \\
\begin{matrix} q \\ r \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & 3 & 6 & 9 & 6 \\
\begin{matrix} q \\ r \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} & 6 & 10 & 6 & 10 \\
\begin{matrix} q \\ r \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & 9 & 10 & 9 & 10 \\
\begin{matrix} q \\ r \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} & 6 & 6 & 6 & 6
\end{array}
$$

نلاحظ أن $\mathcal{D}_3(1)$ تحتوى على أربعة عناصر D_3 وأن قيمة اللعبة تساوى 9 .

الحالة الثانية : سنفرض أن $\mathcal{D}_3(1)$ تحتوى على عنصر واحد فقط فيكون الشكـــل الطبيعى للعبة فى الصـــورة :

$$
\begin{array}{c|cccc}
x & 1 & 2 & 1 & 2 \\
y & 1 & 2 & 2 & 1 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
1,1 \\ 1,2 \\ 2,1 \\ 2,2
\end{array}
\begin{bmatrix}
2 & 7 & 7 & 2 \\
3 & 0 & 0 & 3 \\
9 & 6 & 9 & 6 \\
6 & 10 & 9 & 10
\end{bmatrix}
$$

وقيمة اللعبة $= \frac{54}{7}$ أى ان اللاعب الاول يحصل على أقل من عائده المتوقـع فى حالة المعلومات التامة ، ونلاحظ ان الشكل الطبيعى للعبة فى حالة المعلومـــات التامة يحتوى على ثمان استراتيجيات بسيطة للاعب الاول وأربع استراتيجيات بسيطة للاعب الثانى بينما يحتوى فى هذه الحالة على اربع استراتيجيات بسيطة لكل لاعب ، وبصفـــة عامة فان المرور من حالة المعلومات التامة الى حالة المعلومات الغير تامة يخفض مـــن عدد الاستراتيجيات البسيطة للاعبين أى ان الامكانات الاستراتيجية للاعب تزيد مع زيادة معلوماته .

الفرق بين قيمة اللعبة فى الحالتين السابقتين هو $\frac{9}{7}$ أى انه اذا كان ثمـــن المرور من الحالة الثانية الى الحالة الاولى أقل من $\frac{9}{7}$ فان هذا المرور يكون من مصلحة اللاعب الاول .

الحالة الثالثة : سنفرض فى هذه الحالة أن $\mathcal{D}_2(2)$ يحتوى على مجموعة واحدة D_2 بدلا من مجموعتين بينما أن $\mathcal{D}_3(1)$ تحتوى على اربع مجموعات D_3 ، فتكـــون قيمة اللعبة 9 ونستنتج من ذلك ان مرور اللاعب الثانى من حالة المعلومات التامـــة

الى حالة المعلومات الغير تامة لا يغير من موقفه الاستراتيجى فى اللعبــة •

الحالة الرابعة : سنفرض الآن أن $\mathcal{D}_2(2)$ يحتوى على مجموعة واحدة D_2 وأن $\mathcal{D}_3(1)$ يحتوى على مجموعة واحدة D_3 فتكون قيمة اللعبة $\frac{54}{7}$ أى انهـــا أقل من قيمة اللعبة فى الحالة الاولى والثالثة ولكنها مساوية لقيمة اللعبة فى الحالــة الثانية • أى ان مرور اللاعب من الحالة الثانية الى الحالة الثالثة او العكس ليس لــه أى تأثير على قيمة اللعبة وبالتالى على الموقف الاستراتيجى للاعبــين •

١٠٥ ـ تطبيق استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى على البوكــر :

١٠٥٠١ ـ الخديعة Bluffing

يلاحظ من قواعد لعبة البوكر المذكورة فى ٣٠١ أنه لا توجد اى معلومات عن m_1 متاحة فى m_4 ولكن k_2 يمكن ان يلاحظ نتيجة m_3 المتأثرة بـ m_1 أى أن m_3 تعتبر اشارة لـ m_1 فى m_4 ومن مصلحة k_1 فى m_3 أن يشــــوش معلومات m_1 لـ k_2 فى m_4 •

من الطبيعى أن اللاعب الذى يملك يدا قوية يراهن بـ a ، ويخلق ذلك عند خصمه ايحاء بان هذا اللاعب معه يد قوية وينسحب ، وفى هذه الحالة لا تقارن ايدى اللاعبين ، واللاعب الذى ينسحب ويخسر هذه المباراة يمكن ان يكون هو اللاعــب الذى يملك يدا أقوى من خصمه ، ومن ناحية اخرى فان اللاعب يمكن ان يراهن بـ b عندما تكون معه يد قوية ويمكن ان يكسب b بدلا من a ولكنه يقصد من هــــذا التصرف ان يشوش المعلومات لدى خصمه فى المباريات التالية ، فاذا كان هناك لاعب معروف بانه يراهن بـ a فقط عندما تكون يده قوية ، فان خصمه سوف ينسحب دائما فى هذه الحالة ولا يستفيد هذا اللاعب من يده العالية حتى يجعل خصمه يراهن بـ a ويكون عائده المتوقع أقل ، اى ان اللاعب يجب ان يخلق الشك لدى خصمه بان يراهــن

بطريقة غير منتظمة مراهنات عالية فى الايدى الضعيفة ومراهنات منخفضة فى الايدى القوية ، وسوف نرى فى هذا الباب كيف يمكن ان يكون هذا السلوك رشيدا فى اطار استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى .

١٠٥٠٢ : التوقع الرياضى للاعبين *

نستنتج من ٢٠١ و ٣٠١ أن الاستراتيجيات المركبة لـ k_1 و k_2 هى على الترتيب:

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{3^5}) \quad \text{و}$$

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_{3^5}) .$$

اذا كانت لدى لاعب يد معينة فى مباراة حقيقية فانه سوف يحسب استراتيجيته بجمع البدائل التى تقابل هذه اليد ، وسنعرف على ضوء ذلك $\rho_i^{s_1}$ و $\sigma_j^{s_2}$ كالتالى :

$\rho_i^{s_1}$ تشير الى احتمال ان اللاعب الاول يختار i اذا استعمل $\vec{\xi}$ عندما تكون يده s_1 ،

$\sigma_j^{s_2}$ تشير الى احتمال أن اللاعب الثانى يختار j اذا استعمل $\vec{\eta}$ عندما تكون يده s_2

اى ان :

$$\rho_i^{s_1} = \sum_{T_1=1}^{\beta_1} \xi_{T_1} \qquad , \quad i = 1, 2, 3$$

(مع عدم حساب الا T_1 التى تقابل i)

$$\sigma_j^{s_2} = \sum_{T_2=1}^{\beta_2} \eta_{T_2} \qquad , \quad j = 1, 2, 3$$

(مع عدم حساب الا T_2 التى تقابل j)

$$\sum_{i=1}^{3} \rho_i^{s_1} = 1 \;, \; \rho_i^{s_1} \geqslant 0 \quad ، \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^{s_2} = 1 \;, \; \sigma_j^{s_2} \geqslant 0$$

فمثلا اذا كانت $s = 1, 2$ ، $s_1 = 1$ فان k_1 سيختار البديل 1 باحتمال :

$$\rho_1^1 = \xi_1 + \xi_4 + \xi_5$$

---

* انظر الشكل الطبيعى للعبة فى هذه الحالة فى ٣٠١ .

وسيختار البديل 2 باحتمال

$$p_2^1 = \xi_2 + \xi_6 + \xi_7$$

وسيختار البديل 3 باحتمال

$$p_3^1 = \xi_3 + \xi_8 + \xi_9$$

فاذا كانت S و ... و 2و1 = s فان ($\vec{\xi}$ أو $\vec{\eta}$) تعتمد على 3^S-1

بينما أن ($\vec{p}^{s_1}$ أو $\vec{\sigma}^{s_2}$) تتكون من متجهات عددها S وتعتمدعلى $2S$.

العائد المتوقع للاعب الاول اذا استخدم الاستراتيجية i ضدالاستراتيجية ز هو :

i \ j	1	2	3
1	a	a	b
2	a	b	b
3	-b	b	b

i \ j	1	2	3
1	0	0	b
2	0	0	0
3	-b	0	0

i \ j	1	2	3
1	-a	-a	-b
2	-a	-b	-b
3	-b	-b	-b

يلاحظ ان $M(i,j) = -M(j,i)$ حيث تشير $M(i,j)$ الى العنصرالعام في الجداول التي تمثل العائد المتوقع للاعب الاول وتشير $M(j,i)$ الى العنصر العام في الجداول التي تمثل العائد المتوقع للاعب الثاني . نستنتج من ذلك أن اللعبة متماثلة .*

سنكتب الآن التوقع الرياضي للاعبين مع مراعاة مختلف الايدى الممكنة لكل لاعب والاستراتيجيات المقابلة في الحالات التي يكون فيها $s = 1$ و 2 ، $s = 1, 2, 3$ كمثالين نستنتج منهما الحالة العامة .

اذا كان 2 أو $s_1 = 1$ ، $s_2 = 1$

* Cf. (5) , Vol, 1.

التوقع الرياضى للاعب الاول اذا استخدم الاستراتيجية المركبة $\vec{P}^{s_1}$ ضـــــد الاستراتيجية البسيطة $j=1$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_1^{s_2=1} = \frac{1}{4}\left[(a P_1^2 + a P_2^2 - b P_3^2) - b P_3^1\right]$$

حيث يمثل العنصر الاول التوقع الرياضى لـ k_1 اذا كـان $1 = s_2 < 2 = s_1$ ، ويمثل العنصر الثانى توقعه الرياضى اذا كان $1 = s_2 = s_1$.

والتوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجيـــة البسيطة $j=2$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_2^{s_2=1} = \frac{1}{4}\left(a P_1^2 + b P_2^2 + b P_3^2\right)$$

والتوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجية المركبة ضد الاستراتيجية البسيطة $j=3$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_3^{s_2=1} = \frac{1}{4}\left[(b P_1^2 + b P_2^2 + b P_3^2) + b P_1^1\right]$$

اذا كان 2 أو $1 = s_1$ ، $s_2 = 2$

والتوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجيـــة البسيطة $j=1$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_1^{s_2=2} = \frac{1}{4}\left[-b P_3^2 + (-a P_1^1 - a P_2^1 - b P_3^1)\right]$$

حيث يمثل العنصر الاول التوقع الرياضى لـ k_1 اذا كان $2 = s_2 = s_1$ ويمثـــل العنصر الثانى توقعه الرياضى اذا كان $2 = s_2 < 1 = s_1$

وبالمثل فان التوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضـــــد الاستراتيجية البسيطة $j=2$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_2^{s_2=2} = \frac{1}{4}\left(-a P_1^1 - b P_2^1 - b P_3^1\right)$$

والتوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجيـــة البسيطة $j=3$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_3^{s_2=2} = \frac{1}{4}\left[b p_1^2 + (b p_1^1 - b p_2^1 - b p_3^1)\right].$$

ومن ناحية اخرى فان k_2 سوف يستخدم الاستراتيجيات $\sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma_3^1$

ضد $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1$ ، $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ ضد $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$

التوقع الرياضى ل k_1 مع اعتبار $s_2 = 1, 2$ ، $s_1 = 1, 2$ هو :

$$K(\vec{p}^1 \vec{p}^2 / \vec{\sigma}^1 \vec{\sigma}^2) = (\alpha_1^1\ \alpha_2^1\ \alpha_3^1)\begin{pmatrix}\sigma_1^1\\ \sigma_2^1\\ \sigma_3^1\end{pmatrix} + (\alpha_1^2\ \alpha_2^2\ \alpha_3^2)\begin{pmatrix}\sigma_1^2\\ \sigma_2^2\\ \sigma_3^2\end{pmatrix},$$

سنعتبر الآن الحالة التى يكون فيها $s = 1, 2, 3$

اذا كان $s_1 = 1$ ، 2 او 3 ، $s_2 = 1$

التوقع الرياضى ل k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجية البسيطة $j = 1$ ل k_2 هو :

$$\alpha_1^{s_2=1} = \frac{1}{9}\left[(a p_1^2 + a p_2^2 - b p_3^2) + (a p_1^3 + a p_2^3 - b p_3^3) - b p_3^1\right]$$

حيث يمثل العنصر الاول والثانى التوقع الرياضى ل k_1 اذا كان $s_1 = 2 > s_2 = 1$ ، $s_1 = 3 > s_2 = 1$ ويمثل العنصر الثالث توقعه الرياضى اذا كان $s_1 = s_2 = 1$

وبالمثل فان التوقع الرياضى ل k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجية البسيطة $j = 2$ ل k_2 هو

$$\alpha_2^{s_2=1} = \frac{1}{9}\left[(a p_1^2 + b p_2^2 + b p_3^2) + (a p_1^3 + b p_2^3 + b p_3^3)\right]$$

والتوقع الرياضى ل k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجية البسيطة $j = 3$ ل k_2 هو :

$$\alpha_3^{s_2=1} = \frac{1}{9}\left[(b p_1^2 + b p_2^2 + b p_3^2) + (b p_1^3 + b p_2^3 + b p_3^3) + b p_1^1\right]$$

اذا كان 3 أو 2 ، $1 = s_1$ ، $s_2 = 2$

التوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجية البسيطة $j=1$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_1^{s_2=2} = \frac{1}{9}\left[(a p_1^3 + a p_2^3 - b p_3^3) - b p_3^2 + (-a p_1^1 - a p_2^1 - b p_3^1)\right]$$

حيث يمثل العنصر الاول التوقع الرياضى لـ k_1 اذا كان $s_1 = 3 > s_2 = 2$ ويمثل العنصر الثانى توقعه الرياضى اذا كان $s_1 = s_2 = 2$ ويمثل العنصر الثالث توقعه الرياضى اذا كان $s_1 = 1 < s_2 = 2$

وبالمثل فان التوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجية البسيطة $j = 2$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_2^{s_2=2} = \frac{1}{9}\left[(a p_1^3 + b p_2^3 + b p_3^3) + (-a p_1^1 - b p_2^1 - b p_3^1)\right]$$

والتوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجية البسيطة $j = 3$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_3^{s_2=2} = \frac{1}{9}\left[(b p_1^3 + b p_2^3 + b p_3^3) + b p_1^2 + (b p_1^1 - b p_2^1 - b p_3^1)\right]$$

اذا كان 3 ، 2 ، $1 = s_1$ ، $s_2 = 3$

التوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجية البسيطة $j = 1$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_1^{s_2=3} = \frac{1}{9}\left[-b p_3^3 + (-a p_1^2 - a p_2^2 - b p_3^2) + (-a p_1^1 - a p_2^1 - b p_3^1)\right]$$

حيث يمثل العنصر الاول التوقع الرياضى لـ k_1 اذا كان $s_1 = s_2 = 3$ ويمثل العنصر الثانى توقعه الرياضى اذا كان $s_1 = 2 < s_2 = 3$ ويمثل العنصر الثالث توقعه الرياضى اذا كان $s_1 = 1 < s_2 = 3$

وبالمثل فان التوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد

الاستراتيجية البسيطة $j = 2$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_2^{s_2=3} = \frac{1}{9}\left[\left(-a p_1^2 - b p_2^2 - b p_3^2\right) + \left(-a p_1^1 - b p_2^1 - b p_3^1\right)\right]$$

والتوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة ضد الاستراتيجية البسيطة $j = 3$ لـ k_2 هو:

$$\alpha_3^{s_2=3} = \frac{1}{9}\left[b p_1^3 + \left(b p_1^2 - b p_2^2 - b p_3^2\right) + \left(b p_1^1 - b p_2^1 - b p_3^1\right)\right]$$

ومن ناحية اخرى فان k_2 سوف يستخدم الاستراتيجيات $\sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma_3^1$ ضد $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1$ ، $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ ضد $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$ ، $\sigma_1^3, \sigma_2^3, \sigma_3^3$ ضد $\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3$ فيكون التوقع الرياضى لـ k_1 مع اعتبار : $s_1 = 1, 2, 3$ ، $s_2 = 1, 2, 3$ هو

$$K\left(\vec{p}^{\,1}\ \vec{p}^{\,2}\ \vec{p}^{\,3} \,/\, \vec{\sigma}^{\,1}\ \vec{\sigma}^{\,2}\ \vec{\sigma}^{\,3}\right)$$

$$= \left(\alpha_1^1\ \alpha_2^1\ \alpha_3^1\right)\begin{pmatrix}\sigma_1^1\\ \sigma_2^1\\ \sigma_3^1\end{pmatrix} + \left(\alpha_1^2\ \alpha_2^2\ \alpha_3^2\right)\begin{pmatrix}\sigma_1^2\\ \sigma_2^2\\ \sigma_3^2\end{pmatrix} + \left(\alpha_1^3\ \alpha_2^3\ \alpha_3^3\right)\begin{pmatrix}\sigma_1^3\\ \sigma_2^3\\ \sigma_3^3\end{pmatrix}$$

وبصفة عامة فان التوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم الاستراتيجية المركبة $\vec{p}^{\,s_1}$ ضد الاستراتيجية البسيطة $j = 1$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_1^{s_2} = \frac{1}{S^2}\left[\sum_{\substack{s_1 > s_2\\ s_1 = s_2+1}}^{S}\left(a p_1^{s_1} + a p_2^{s_1} - b p_3^{s_1}\right) - b p_3^{s_2} + \sum_{\substack{s_1 < s_2\\ s_1 = 1}}^{s_2-1}\left(-a p_1^{s_1} - a p_2^{s_1} - b p_3^{s_1}\right)\right]$$

حيث $s_2 = 1, \ldots, S$

وبالمثل فان التوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم استراتيجيته المركبة $\vec{p}^{\,s_1}$ ضد

الاستراتيجية البسيطة $j = 2$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_2^{s_2} = \frac{1}{S^2}\left[\sum_{s_1=s_2+1}^{S}\left(a\rho_1^{s_1}+b\rho_2^{s_1}+b\rho_3^{s_1}\right)+\sum_{s_1=1}^{s_2-1}\left(-a\rho_1^{s_1}-b\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1}\right)\right]$$

حيث $s_2 = 1, \ldots, S$

والتوقع الرياضى لـ k_1 اذا استخدم الاستراتيجية المركبة $\vec{\rho}^{\,s_1}$ ضـــــد الاستراتيجية البسيطة $j=3$ لـ k_2 هو :

$$\alpha_3^{s_2} = \frac{1}{S^2}\left[\sum_{s_1=s_2+1}^{S}\left(b\rho_1^{s_1}+b\rho_2^{s_1}+b\rho_3^{s_1}\right)+b\rho_1^{s_1}+\sum_{s_1=1}^{s_2-1}\left(b\rho_1^{s_1}-b\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1}\right)\right]$$

حيث $s_2 = 1, \ldots, S$

التوقع الرياضى لـ k_1 فى الحالة العامة :

$$K\left(\vec{\rho}^{\,1},\ldots,\vec{\rho}^{\,s}/\vec{\sigma}^{\,1},\ldots,\vec{\sigma}^{\,s}\right)=\left(\alpha_1^1\ \alpha_2^1\ \alpha_3^1\right)\begin{pmatrix}\sigma_1^1\\ \sigma_2^1\\ \sigma_3^1\end{pmatrix}+\cdots+\left(\alpha_1^{s_2}\ \alpha_2^{s_2}\ \alpha_3^{s_2}\right)\begin{pmatrix}\sigma_1^{s_2}\\ \sigma_2^{s_2}\\ \sigma_3^{s_2}\end{pmatrix}+\cdots+\left(\alpha_1^{S}\ \alpha_2^{S}\ \alpha_3^{S}\right)\begin{pmatrix}\sigma_1^{S}\\ \sigma_2^{S}\\ \sigma_3^{S}\end{pmatrix}.$$

اذا استخدم k_2 , k_1 استراتيجيات النهاية الصغرى للنهايات العظمى فان :

$$K\left(\vec{\rho}^{\,1},\ldots,\vec{\rho}^{\,S}/\vec{\sigma}^{\,1},\ldots,\vec{\sigma}^{\,S}\right)=V^1+V^2+\cdots+V^{s_2}+\cdots+V^{S}.$$

سنكتب الآن :

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_j^{s_2 *} \sigma_j^{s_2 *} - V^{s_2} = 0$$

حيث $s_2 = 1, \ldots, S$

و $$\sum_{j=1}^{3} \alpha_j^{s_2 *} \sigma_j^{s_2 *} - \sum_{j=1}^{3} V_j^{s_2} \sigma_j^{s_2 *} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\alpha_j^{s_2 *} - V_j^{s_2} \right) \sigma_j^{s_2 *} = 0$$

نستنتج من ذلك انه اذا كان $\sigma_j^{s_2 *} > 0$ فان $\alpha_j^{s_2} = V^{s_2}$

واذا كان $\alpha_j^{* s_2} > V^{s_2}$ فان $\sigma_j^{* s_2} = 0$

وحيث ان اللعبة متماثلة فاننا يمكن ان نكتب الشروط الآتـــى :

$$\vec{p}_1^{\,*} = \vec{\sigma}^{*1}, \ldots, \vec{P}^{s} = \vec{\sigma}^{s}$$

هى استراتيجيات مثالية اذا وجدنا انه لكل s_2 ، اذا لم تحـــقق $\alpha_j^{s_2}$ نهايتها الصغرى فان

$$\sigma_j^{s_2} = p_j^{s_2} = 0$$

واذا كتبنا $\alpha_j^{s_2} = \frac{\gamma_j^{s_2}}{S}$ فان :

$$\gamma_1^{s_2} = \frac{1}{S} \left[\sum_{s_1 = s_2+1}^{S} \left(a p_1^{s_1} + a p_2^{s_1} - b p_3^{s_1} \right) - b p_3^{s_2} - \sum_{s_1=1}^{s_2-1} \left(-a p_1^{s_2} - a p_2^{s_2} - b p_3^{s_2} \right) \right],$$

$$\gamma_2^{s_2} = \frac{1}{S} \left[\sum_{s_1 = s_2+1}^{S} \left(a p_1^{s_1} + b p_2^{s_1} + b p_3^{s_1} \right) + \sum_{s_1=1}^{s_2-1} \left(-a p_1^{s_1} - b p_2^{s_1} - b p_3^{s_1} \right) \right],$$

$$\gamma_3^{s_2} = \frac{1}{S} \left[\sum_{s_1 = s_2+1}^{S} \left(b p_1^{s_1} + b p_2^{s_1} + b p_3^{s_1} \right) + b p_1^{s_2} + \sum_{s_1=1}^{s_2-1} \left(b p_1 - b p_2 - b p_3 \right) \right].$$

٣٠٥٠١ : الشكل المستمر للعبــة ؛

سنعبر الان عن الايدى الممكنة للاعب خلال الفترة من ٥ الى ١ وذلك بدلا من الفترة من ١ الى S بوضع $z = \frac{s-1}{S-1}$ ، وبالتعويض عن قيم z المقابلة لقيم s الممكنة نجد أن :

الأيدى الممكنة	$s=$	1	2	3	...	$s-1$	s
	$z=$	0	$\frac{1}{s-1}$	$\frac{2}{s-1}$	...	$\frac{s-2}{s-1}$	1

وهكذا فان قيم z تشغل الفترة $0 \leqslant z \leqslant 1$ بطريقة مكثفة*

سنفرض ان الخطوة العشوائية التى تختار s سوف تنتج عنها أى قيمة من قيم z فى الفترة $0 \leqslant z \leqslant 1$ وسنفرض ان احتمال اختيار اى جزء من الفترة السابقة يساوى طول هذه الفترة اى ان z موزعة توزيعا متساويا خلال هذه الفترة ٠

سنشير الى يد اللاعب الاول بالرمز z_1 ويد اللاعب الثانى بالرمز z_2 ٠ سنحل بالتالى المتجهات $\vec{\rho}^{\,z_1}$, $\vec{\sigma}^{\,z_1}$ حيث $0 \leqslant z_1, z_2 \leqslant 1$ محل المتجهات $\vec{\rho}^{\,s_1}$, $\vec{\sigma}^{\,s_2}$ حيث $s_1, s_2 = 1, \ldots, S$ والقيم $\gamma_j^{z_2}$ محل القيم $\gamma_j^{s_2}$ حيث $j = 1, 2, 3$ ، وسنحل أيضا $\int_0^1 \ldots dz_1$ ، $\int_0^1 \ldots dz_2$ محل $\frac{1}{S}\sum_{s_1=1}^{S}$ ، $\frac{1}{S}\sum_{s_2=1}^{S}$ و $\int_0^{z_2} \ldots dz_1$ ، $\int_{z_2}^{1} \ldots dz_1$ محل $\frac{1}{S}\sum_{s_1=1}^{S_2-1}$ ، $\frac{1}{S}\sum_{s_1=s_2+1}^{S}$.

من ذلك يمكن ان نكتب :

---

* تلاحظ من ٣٠١ أن $S = 2,598,960$.

$$K = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^{z_2} \sigma_j^{z_2} \, dz_2 \quad ,$$

$$\gamma_1^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a p_1^{z_1} - a p_2^{z_1} - b p_3^{z_1}) \, dz_1 + \int_{z_2}^1 (a p_1^{z_1} + a p_2^{z_1} - b p_3^{z_1}) \, dz_1 \quad ,$$

$$\gamma_2^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a p_1^{z_1} - b p_2^{z_1} - b p_3^{z_1}) \, dz_1 + \int_{z_2}^1 (a p_1^{z_1} + b p_2^{z_1} + b p_3^{z_1}) \, dz_1 \quad ,$$

$$\gamma_3^{z_2} = \int_0^{z_2} (b p_1^{z_1} - b p_2^{z_1} - b p_3^{z_1}) \, dz_1 + \int_{z_2}^1 (b p_1^{z_1} + b p_2^{z_1} + b p_3^{z_1}) \, dz_1 \, .$$

ونلاحظ ان احتمالات العناصر التى تقابل $s_2 = s_1$ اى التى تقابل $z_1 = z_2$ تساوى صفر ، ومن الواضح ان المتجهات $\vec{p}^{\,z}$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$ التى تعتبر متجهـــات احتمالية تمثل استراتيجيات مثالية اذا وجدنا انه لكل z و j ، اذا لم تحقـــق γ_j^z نهايتها الصغرى فان $p_j^z = 0$.

١٠٦٠٤ : تحديد الاستراتيجيات المثاليـــة :

سنثبت اولا أن $p_2^z = 0$

سنفرض أن $p_2^z > 0$ أى أن γ_j^z تحقق نهايتها الصغرى عندما تكون $j=2$ اى ان $\gamma_1^z \geqslant \gamma_2^z$ أو $\gamma_2^z - \gamma_1^z \leqslant 0$ وبعبارة أخرى فان :

$$\int_0^z (-b+a) p_2^{z_1} \, dz_1 + (b-a) \int_z^1 p_2^{z_1} \, dz_1 + 2b \int_z^1 p_3^{z_1} \, dz_1$$

$$= (a-b) \left(\int_0^z p_2^{z_1} \, dz_1 - \int_z^1 p_2^{z_1} \, dz_1 \right) + 2b \int_z^1 p_3^{z_1} \, dz_1 \leqslant 0$$

سنفرض أن z^0 هو الحد الاكبر لـ z الذى يكون فيه $p_2^z > 0$ أى أن :

$$P_2^{z_1} = 0 \qquad z_1 > z_0 \;,$$
$$P_2^{z_1} > 0 \qquad z_1 < z_0$$

اذا

$$(a-b)\left(\int_0^{z_0} P_2\, dz_1 - \int_{z_0}^{1} P_2\, dz_1\right) + 2b\int_{z_0}^{1} P_3\, dz_1 \leqslant 0$$

(وذلك لان $\gamma_2^{z_0} - \gamma_1^{z_0} < 0$)

فاذا كتبنا $\int_{z_0}^{1} P_2^{z_1}\, dz_1 = 0$ باشارة موجبة فى العلاقة الاخيرة فان

$$(a-b)\int_0^1 P_2^{z}\, dz_1 + 2b\int_{z_0}^{1} P_3^{z}\, dz_1 \leqslant 0$$

ونلاحظ أن $P_2^{z} \geqslant 0$ وأحيانا $0 <$ فرضا أى أن العنصر الأول من العلاقة الأخيرة موجب اما العنصر الثانى فهو اكبر من او يساوى صفر ونصل الى تناقض ، اذا $P_2^{z} = 0$

ونستنتج من ذلك أن $P_3^{z} = 1 - P_1^{z}$

يلاحظ انه يوجد فى الفترة $0 \leqslant z \leqslant 1$ فترات جزئية يكون فيها P_1^{z} يساوى واحد .وفترات جزئية يكون فيها P_1^{z} يساوى صفر ، سنسمى z التى لا تاخذ القيم صفر او واحد z المتوسطة intermediate ، ونجد عند z المتوسطة ان $\gamma_3^{z} - \gamma_1^{z} = 0$ او بعبارة أخرى:

$$\int_0^{z}(bP_1^{z} + aP_1^{z})\, dz_1 + \int_{z}^{1}(bP_1^{z} - aP_1^{z} + 2bP_3^{z})\, dz_1$$

$$(1) \quad = (a+b)\left(\int_0^{z} P_1^{z}\, dz_1 - \int_{z}^{1} P_1^{z}\, dz_1\right) + 2b\,(1-z) = 0$$

سنعتبر مرة أخرى قيمتين لـ z المتوسطة : $\bar{\bar{z}}$ ، $\bar{z}$ ، وبالتعويض فى (١) نجد أن:

$$(2) \qquad (a+b)\left(\int_0^{\bar{z}} p_1^{z} dz_1 - \int_{\bar{z}}^{1} p_1^{z} dz_1\right) + 2b(1-\bar{z}) = 0 \quad ,$$

$$(3) \qquad (a+b)\left(\int_0^{\bar{\bar{z}}} p_1 \, dz_1 - \int_{\bar{\bar{z}}}^{1} p_1^{z} dz_1\right) + 2b(1-\bar{\bar{z}}) = 0 \quad .$$

وبطرح (2) من (3) نجد أن :

$$(a+b)\int_{\bar{z}}^{\bar{\bar{z}}} p_1^{z} dz_1 + (a+b)\left(\int_{\bar{\bar{z}}}^{1} p_1^{z} dz_1 - \int_{\bar{\bar{z}}}^{1} p_1^{z} dz_1\right) - 2b(\bar{\bar{z}}-\bar{z}) = 0$$

$$= 2(a+b)\int_{\bar{z}}^{\bar{\bar{z}}} p_1^{z_1} dz_1 - 2b(\bar{\bar{z}}-1)$$

أى أن

$$\frac{1}{\bar{\bar{z}}-\bar{z}}\int_{\bar{z}}^{\bar{\bar{z}}} p_1^{z_1} dz_1 = \frac{b}{a+b}$$

نستنتج من ذلك ان متوسط $p_1^{z_1}$ بين $\bar{\bar{z}}$ و $\bar{z}$ هو $\frac{b}{a+b}$ ، اى أن $p_1^{z_1}=0$ ، $p_1^{z_1}=1$ لا يتحققان داخل الفترة $\bar{z} \leqslant z \leqslant \bar{\bar{z}}$ لأنه إذا كان $p_1^{z}=0$ أو $p_1^{z}=1$ فان المتوسط سيكون صفر أو ١ . ينتج من ذلك انه بين كل قيمتين متوسطتين $\bar{\bar{z}}$ و $\bar{z}$ ، يوجد على الاقل قيمة متوسطة ثالثة ، ويوضح تقريب هذه النتيجة ان $p_1^{z_1} = \frac{b}{a+b}$ فى كل مكان بين $\bar{\bar{z}}$, $\bar{z}$:

سنثبت الان أن $p_1^{z_1}=0$ و $p_1^{z_1}=1$ لا تمثلان دائما استراتيجيات مثالية ايا كانت قيمة z_1 . سنفرض أن $p_1^{z_1}=0$ اذا

$$\gamma_1^0 = \int_0^1 -b\, p_3^{z} \, dz_1 = -b \quad ,$$

$$\gamma_3^0 = \int_0^1 b\, p_3^{z} \, dz_1 = b$$

أى أن $\gamma_1^0 < \gamma_3^0$ ويتناقض ذلك مع فرض أن $p_1^{z}=0$.

سنفرض مرة ثانية أن $p_1^{z_1} = 0$ اذا

$$\gamma_1^0 = \int_0^1 a\, dz_1 = a \quad , \quad \gamma_3^0 = \int_0^1 b\, p_1\, dz_1 = b$$

أى أن $\gamma_3^0 < \gamma_1^0$ وهذا يتناقض مع فرض ان $p_1^{z} = 1$

سنفرض الآن أن

$$p_1^{z_1} = \frac{b}{a+b} \qquad \bar{z}' \leqslant z \leqslant \bar{z}''$$

وسنثبت أن

$$p_1^{z_1} = 1 \qquad \bar{z}'' \leqslant z \leqslant 1$$

سنكتب $z = 1$ فى (1):

$$\gamma_3 - \gamma_1 = (a+b)\int_0^1 p_1^{z_1}\, dz_1 > 0$$

(لأن z متوسطة وبالتالى فان $p_1^{z_1} \neq 0$)

اذا $\gamma_3 > \gamma_1$ ، $p_1^{z_1} = 1$

سنفرض أن $p_1^{z_1} = 0$ أو $p_1^{z_1} = 1$ لجميع قيم z حيث $0 \leqslant z \leqslant \bar{z}'$

لاثبات ان هذا الفرض خاطىء سنكتب التفاضل الاول ل فى هذه الفترة طبقا لهـــذا الفـرض :

$$(a+b)\int_0^{z} p_1^{z_1}\, dz_1 - (a+b)\int_{z}^{1} p_1^{z_1}\, dz_1 + 2b\,(1-z) = 0$$

اذا

$$(a+b)\left(p_1^{z_1} z_1\right)_0^1 - (a+b)\left(p_1^{z_1} z_1\right)_0^1 + 2b(1-z)$$

$$= z(a+b)\,p_1^{z_1} - (a+b)\,p_1^{z_1}(1-z) + 2b(1-z)$$

سنكتب التفاضل الاول لـ (1) في الصورة :

$$2(a+b)p_1^{z_1} - 2b \begin{cases} < 0 & p_1^{z_1} = 0 \quad (أ) \\ > 0 & p_1^{z_1} = 1 \quad (أأ) \end{cases}$$

أي أن $\gamma_3 - \gamma_1$ دالة متناقصة او متزايدة بالترتيب في الفترة $0 \leqslant \bar{z} \leqslant \bar{z}''$

وحيث أن $\gamma_3 - \gamma_1 = 0$ في $\bar{z}'$ اذا $\gamma_3 - \gamma_1 > 0$ أو < 0

طبقا للفرض (أ) أو (أأ) على الترتيب وعلى ذلك فان :

$p_1^{z_1} = 1$ $\quad$ $p_1^{z_1} = 0$ وذلك يتناقض مع (أ) أو (أأ) اذا $\bar{z}' = 0$

سنحدد الآن النقطة $\bar{z}''$

سنضع $\bar{z} = \bar{z}' = 0$ في (1) فنصل الى :

$$-(a+b)\int_0^1 p_1^{z_1}\, dz_1 + 2b = 0 \quad و \quad \int_0^1 p_1^{z_1}\, dz_1 = \frac{2b}{a+b}$$

ولكن

$$\int_0^1 p_1\, dz_1 = \bar{z}'' \cdot \frac{b}{a+b} + (1 - \bar{z}'') \cdot 1 = 1 - \frac{a}{a+b}\bar{z}''$$

اذا

$$\bar{z}'' = \frac{a-b}{a}$$

نستخلص من ذلك أن :

$$p_1^{z_1} = \frac{b}{a+b} \qquad 0 \leqslant z \leqslant \frac{a-b}{a} \quad و$$

$$= 1 \qquad \frac{a-b}{a} < z \leqslant 1 .$$

٥٠٥٠١ : العلاقة بين الاستراتيجيات المثالية والتوقع الرياضى المقابل :

سنبحث الان عن العلاقة بين استراتيجيات النهاية الصغرى للنهايات العظمى $p_j^{z_1}$ والتوقعات الرياضية $\gamma_j^{z_2}$ حيث $j = 1, 2, 3$ ، $0 \leq z_1, z_2 \leq 1$

سنحدد قيم $\gamma_j^{z_2}$ فى النقط 1 و $\frac{a-b}{a}$ و $z = 0$ كالتالى :

اذا كان $z_2 = 0$ فان :

$$\gamma_1^{z_2} = \int_0^1 (a p_1^{z_1} - b p_3^{z_1})\, dz_1 = b \text{ ,}$$

$$\gamma_3^{z_2} = \int_0^1 (b p_1^{z_1} + b p_3^{z_1})\, dz_1 = b .$$

واذا كان $z_2 = \frac{a-b}{a}$ فان :

$$\gamma_1^{z_2} = \int_0^{\frac{a-b}{a}} (-a p_1^{z_1} - b p_3^{z_1})\, dz_1 + \int_{\frac{a-b}{a}}^1 (a p_1^{z_1} - b p_3^{z_1})\, dz_1 = \frac{b(3b-a)}{a+b} \text{ ,}$$

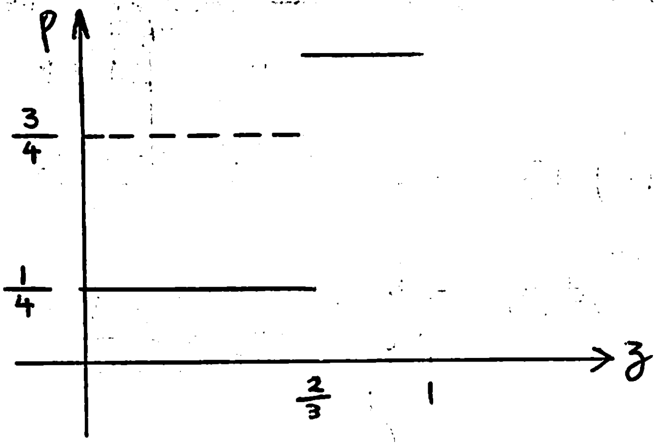
$$\gamma_3^{z_2} = \int_0^{\frac{a-b}{a}} (b p_1^{z_1} - b p_3^{z_1})\, dz_1 + \int_{\frac{a-b}{a}}^1 (b p_1^{z_1} + b p_3^{z_1})\, dz_1 = \frac{b(3b-a)}{a+b}$$

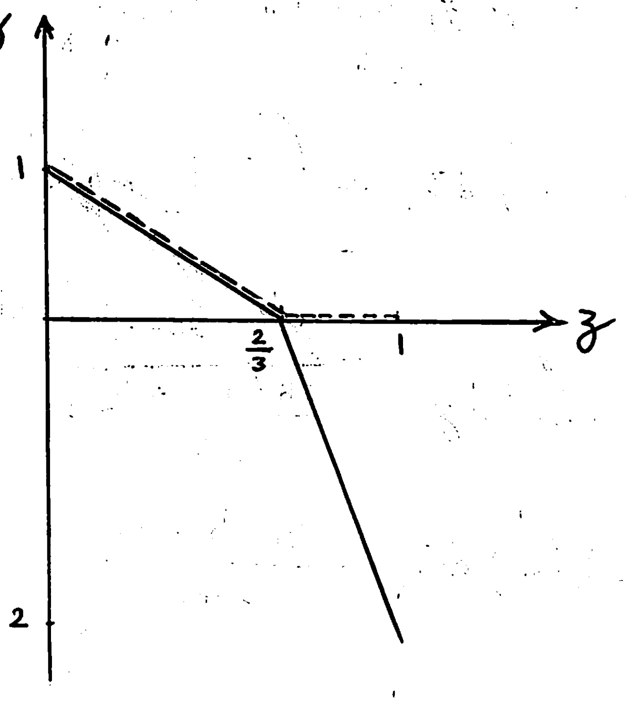
اذا كان $z_2 = 1$ فان

$$\gamma_1^{z_2} = \int_0^1 (-a p_1^{z_1} - b p_3^{z_1})\, dz_1 = \frac{-b(3a-b)}{a+b} \text{ ,}$$

$$\gamma_3^{z_2} = \int_0^1 (b p_1^{z_1} - b p_3^{z_1})\, dz_1 = \frac{b(3b-a)}{a+b} .$$

سنأخذ الحالة الخاصة التى يكون فيها $a = 1$ و $b = 3$ كمثال نوضح عليه العلاقة بين ρ_1 و γ_1 وبين ρ_3 و γ_3 وسنهمل العلاقة بين ρ_2 و γ_2 وذلك لأن $\rho_2 = 0$ ، وسنحدد قيم γ_1 و γ_3 المقابلة لمختلف قيم z كما فى الشكل الآتى :





(تشير ــــــ الى γ_1, p_1 وتشير ـــــــ الى γ_3, p_3)

يلاحظ أن :

$p_1^{\gamma_1} \neq 0$ ، $0 \leqslant z \leqslant \frac{2}{3}$ و $\gamma_1 = \gamma_3$

$p_1^{\gamma_1} = 1$ ، $\frac{2}{3} < z \leqslant 1$ ، $\gamma_1 < \gamma_3$

٦٠٥٠١ : تفسير الحـــل :

سنكتب استراتيجيات النهاية الصغرى للنهايات العظمى في الصورة :

$$(15) \quad p_1^{\gamma_1} \begin{cases} = \dfrac{b}{a+b} & 0 \leqslant z \leqslant \dfrac{a-b}{a} \\ = 1 & \dfrac{a-b}{a} < z \leqslant 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$(17) \quad p_2^{\gamma_1} = 0$$

$$(18) \quad p_3^{\gamma_1} \begin{cases} = \dfrac{a}{a+b} & 0 \leqslant z \leqslant \dfrac{a-b}{a} \\ = 0 & \dfrac{a-b}{a} < z \leqslant 1 \end{cases}$$

نرى من (7) أن اللاعب ليس من مصلحته أن يستخدم الاستراتيجية الثانية الـــتي تشير له أن يراهن بـ b ثم يطلب أن تكشف الأيدى (اذا كان لدية الفرصة لذلك).

وتوضح (9) و(6) أن اللاعب يجب أن يراهن بـــ a اذا كانت يده قوية أى اذا كانت $z > \frac{a-b}{a}$ أما اذا كانت $z \leqslant \frac{a-b}{a}$ فان (9) و (8) تعـــني أن $p_3^{\gamma_1}/p_1^{\gamma_1} = \frac{a}{b}$ وحيث أن $a > b$ فان المراهنات العالية يجب أن تكون أقـــل نسبيا من المراهنات المنخفضة ، ومن الواضح أن نصيب الخديعة سيقل عندما تقترب b من a أى عندما تقترب تكلفة المراهنات المنخفضة من تكلفة المراهنات العالية ، ويلاحظ أن فكـــرة الخديعة في أطار استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى تخلق عنصر عدم التأكـــد الذى يمثل قيدا على سلوك الخصم .

سنثبت الآن كيف ان اللاعب يمكن ان يتوقع الحصول على اكثر من قيمة اللعبة عندما يحاول خصمه ان يخدعه بطريقة غير مبررة طبقا لاستراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى :

سنكتب :

$$p_2^{z} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} p_1^{z} &= 1 \\ p_3^{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad z > \frac{a-b}{a}$$

وسنفرض أن :

$$p_1 \gtrless \frac{b}{a+b} \qquad z = z_0 < \frac{a-b}{a} \qquad (10)$$

نستنتج من المعادلة (1) أن :

$$\gamma_3 - \gamma_1 = (a+b)\left(\int_0^{z} p_1^{z_1} dz_1 - \int_{z}^{1} p_1^{z_1} dz_1\right) + 2b(1-z)$$

سنعتبر $z < z_0$ اذا $\gtrless$ في (10) لا تغير $\int_0^{z} p_1^{z_1} dz_1$ ولكنها ستزيد / ستخفض $\int_{z}^{1} p_1^{z_1} dz_1$ وبالتالي فان $\gamma_3^{z} - \gamma_1^{z}$ سوف تنخفض / تزيد .

وحيث أن $\gamma_3^{z} - \gamma_1^{z} = 0$ قبل هذا التغيير فانها ستكون $\lesseqgtr 0$ بعده

اى ان $\gamma_3^{z} \lessgtr \gamma_1^{z}$

سنفرض مرة ثانية z في الفترة $z_0 < z \leqslant \frac{a-b}{a}$ اذا $\gtrless$ في (10)

ستزيد / ستنقص $\int_0^{z} p_1^{z_1} dz_1$ بينما أن $\int_0^{1} p_1^{z_1} dz_1$ لا تتغير

وبالتالي فان $\gamma_3^{z} - \gamma_1^{z}$ سوف تزيد / تقل . وحيث ان $\gamma_3^{z} - \gamma_1^{z} = 0$ قبل هذا

التغيير فانها ستكون ٥ $\gtreqless$ بعده أى أن $\gamma_1^z \gtreqless \gamma_3^z$

نستخلص من ذلك ان تغيير (10) بـ $\gtreqless$ يترتب عليه أن :

$$\gamma_3^z \lesseqgtr \gamma_1^z \qquad z < z_0 \quad \text{و}$$

$$\gamma_3^z \gtreqless \gamma_1^z \qquad z_0 < z \leq \frac{a-b}{a}$$

وفى هذه الحالة فان الخصم يمكن ان يخفض قيمة اللعبة اى العائد المتوقع للاعب باستخدام استراتيجيات مناسبة معرفة كالتالى :

اذا كان $z < z_0$ بزيادة σ_3^z / σ_1^z على حساب σ_1^z / σ_3^z اى بخفض / زيادة σ_1^z حتى القيمة ٥ / ١ .

واذا كان $z_0 < z \leq \frac{a-b}{a}$ بزيادة σ_1^z / σ_3^z على حساب σ_3^z / σ_1^z اى بزيادة / بخفض σ_1^z حتى القيمة المتطرفة ١ / ٥ وبعبارة اخرى اذا خدع الخصم كثيرا / قليلا لقيمة معينة z_0 فانه يمكن ان يعاقب بخديعته اقل / اكثر للقيم الاصغر من z_0 وبخديعته اكثر / اقل للايدى الاكبر من z_0 ، اى انه يمكن معاقبة الخصم الذى يخدع بطريقة غير مبررة وذلك بمجاراة خطئه (انحرافه عن الاستراتيجية المثالية) للايدى الاكبر من z_0 وعمل العكس للايدى الاقل من z_0 .

الفصـــل الثانـــى

استخدام مبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى فى تفسير نموذج ينومان للنمو الاقتصادى

يستخدم مبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى كأداة رياضية هامة لدراسة بعض النماذج الاقتصادية وسنرى فى هذا الفصل على سبيل المثال كيف أمكن تفسير نموذج ينومان للنمو الاقتصادى المتوازن باستخدام هذا المبدأ ، وقد وجدنا عند محاولة استخدام برامج الحاسب الآلى المعروفة المطبقة على البرامج الخطية لحل النموذج أنه من الضرورى تحويل اللعبة المعرفة فى النموذج الى برنامج خطى ولكن المشكلة التى تقابلنا هى أن هذه اللعبة دالة فى معدل النمو وأن قيمة اللعبة تساوى صفر ، وسوف نعرض فى هذا الفصل طريقتين مقترحتين لحل النموذج أحدهما تعتمد على استخدام نظرية الألعاب مباشرة والأخرى على تحويل اللعبة المعرفة فى النموذج الى برنامج خطى يسمح شكله الخاص بايجاد طريقة للحل .

٢ ، ١ الفروض التى يقوم عليها النموذج *

سنفرض أن الاقتصاد محل الدراسة يتكون من منتجات عددها n وعمليات انتاجية عددها m وأن كل عملية انتاجية تستخدم بعض المنتجات لانتاج منتجات أخرى ، تعمل كل عملية انتاجية أبطاقة تشغيل x_i حيث $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ ، $x_i \geqslant 0$ ، فاذا شغلت العملية i بطاقة تشغيل واحدة فانها تتطلب الكمية a_{ij} من المنتج $j\ (=1,\dots,n)$ وذلك لانتاج الكمية b_{ik} من المنتج $k\ (k=1,\dots,n)$ ، وسنفرض أن a_{ij}، b_{ij} أعداد حيقيقية غير سالبة لجميع قيم j و i ،ويمكن أن نعبر عن التغير الطبيعى فى الانتاج خلال وحدة من الزمن كالتالى :

$$\text{(الفترة } t\text{)} \qquad xA \longrightarrow xB \qquad \text{(الفترة } t-1\text{)}$$

---

* Cf., (6).

حيث $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$.تمثل مكونات المتجه xA كميات المدخـــلات المستخدمه فى الانتاج وتمثل مكونات المتجه xB الكميات المنتجة ، وسنشير الى سعر كل سلعة بالرمز y_j حيث $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ و $y_j \geqslant 0$.

ويمكن أن نعبر عن التغيرات فى القيم خلال وحدة من الزمن كالتالى :

(الفترة t) $Ay \longrightarrow By$ (الفترة $t-1$)

حيث تمثل مكونات المتجه Ay قيمة المدخلات فى عملية انتاجية معينة وتمثل مكونـــات المتجه By قيمة المنتجات بواسطة هذه العملية .

سنفرض أن هناك معدل فائدة b (فى المائة) نستنتج منه معامل الفائدة $\beta = 1+ \frac{b}{100}$ وأن هناك معدل نمو a (فى المائة) نستنتج منه معامل النمو $\alpha = 1 + \frac{a}{100}$.

يبحث النموذج عن المتجهات x,y والمعاملات β, α التى تحقق الشروط الاتية :ــ

يجب أن نتأكد أولا أن كل دورة انتاجية تنتج كمية كافية من كل منتج لامداد استخدامات الفترة التالية أى أن :

$$(1) \quad xB \geqslant \alpha xA \quad \text{أو} \quad x(B - \alpha A) \geqslant 0$$

يضمن هذا الشرط أن الانتاج سوف ينمو نموا متوازنا بمعامل نمو ثابت ، وحتى نتأكـــد أن الاقتصاد متوازن ماليا سنفرض أن كل عملية انتاجية لا تسمح بأن تعطى عائدا أكبر من العائد الذى يمكن الحصول عليه بواسطة معدل الفائدة الجارى ، أى أن :

$$(2) \quad By \leqslant \beta Ay \quad \text{أو} \quad (B - \beta A)\, y \leqslant 0$$

---

* سنفرض فى هذا العرض أنه اذا كان u,v متجهان فان $v \geqslant u$ تعنى أن $\geqslant$ سوف تتحقق لجميع مكونات u,v ، وسوف لا نفرق بين العدد صفر والمتجه المكون من اصفار لان ذلك سيكون واضحا من العرض .

الشرط الثالث خاص بالانتاج الزائد ، فاذا كان انتاج منتج معين يتعدى ما يستطيع أن يمتصه الاقتصاد القومى فان سعره يهبط الى الصفر ، يعطى المتجه $x(B - \alpha A)$ كمية الانتاج الزائد ويكون العنصر الذى ترتيبه j من هذا المتجه موجبا اذا كان هناك زيادة فى المنتج j ، وبتخصيص سعر يساوى صفر لهذه المنتجات فان :

$$(3) \quad X (B - \beta A) y = 0$$

يتعلق الشرط الرابع بكفاءة استخدام العمليات الانتاجية ، فاذا أعطت عملية انتاجية ربحا أقل من مستوى معدل الفائدة ، فان هذه العملية سوف لا تنتج أى أنه اذا كان العنصر الذى ترتيبه i فى المتجه $(B - \beta A) y$ سالبا ، فان هذه العملية تكون غير كفءة ونجد أن :

$$(4) \quad x (B - \beta A) \quad y = 0$$

وقد أضاف Von Neumann الغرض التالى :-

لجميع قيم j و i

$$* \quad a_{ij} + b_{ij} > 0$$

ويعنى هذا الغرض أن كل عملية انتاجية يجب اما أن تستهلك أو تنتج كمية موجبة من كل منتج ، وقد وضع الكاتب هذا الشرط حتى يضمن أن α ستكون وحيدة وليمنع الاقتصاد محل الدراسة من أن يتجزأ الى أجزاء منفصلة . وقد أثبت ينومان وجود حل للنموذج تحت الشروط السابقة ، ولكن لوحظ أن هناك أمثلة تحقق هذه الشروط ولكن لا تعتبر مقبولة من الناحية الاقتصادية فمثلا اذا اعتبرنا الاقتصاد المعرف بالمصفوفات B ، A حيث

$b_{ij} = 0$ ، $a_{ij} = 1$ لجميع قيم i ، j ، $\alpha = \beta = 0$ ، x، y،

متجهات احتمالية اختيارية نجد أن الشروط* (4) - (1) تنطبق على هذا الاقتصاد الذى يستخدم مواد أولية ولا ينتج شيئا وذلك لا يتفق مع الواقع الاقتصادى ، وقد أمكن التغلب

---

* Cf. Von Nemann, J., "A model of general Economic equilibrium", Review of economic studies, Vol. 13, No. 33, (1945-46), pp. 1-9.

على هذه المشكلة بغرض أن قيمة المنتجات المنتجة فى الاقتصاد القومى موجبه أى :

$$(5) \qquad xBy > 0$$

وسوف نفرض الان أن كل عملية يجب أن تستخدم بعض المدخلات أى بعض المنتجات التى أنتجت فى الفترة السابقة وأن كل منتج يجب أن ينتج فى الاقتصاد أى أنه بالنسبة لمنتج معين فان هناك على الاقل عملية انتاجية واحدة يمكن أن تنتجه ، ويعنى ذلك أنه يوجد على الاقل فى كل صف من A و فى كل عمود من B عنصر موجب ، وسنرمز لهذا الغرض بالرمز **.

٢٠٢ تفسير النموذج بمبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى :

من (4) , (3) نجد أن

$$xBy = \alpha XAy = \beta xAy > 0$$

حيث $xBy > 0$

نستنتج من ذلك أن $xAy > 0$ بحيث أن :

سنكتب $\alpha = \beta = xBy/xAy$

$$M_\alpha = (B - \alpha A)$$

وسنعيد صياغة العلاقات الموجودة فى النموذج كالتالى :ـ

$$(1') \qquad xM_\alpha \geqslant 0,$$
$$(2') \qquad M_\alpha y \leqslant 0,$$
$$(5') \qquad xBy > 0$$

ويلاحظ أننا أهملنا العلاقة (3) وذلك لان حل (2) و (1) سيحقق هذه العلاقة فاذا ضربنا $x M_\alpha \geqslant 0$ ، y في $M_\alpha y \leqslant 0$ في X فاننا نحصل على $x M_\alpha y \geqslant 0$ و $x M_\alpha y \leqslant 0$ وذلك يتضمن أن $x M_\alpha y = 0$.

فاذا اعتبرنا M_α كصفوفة لعبة فان (2) و (1) يتضمن أن $V(M_\alpha) = 0$ وأن حل النموذج x, y هو الاستراتيجيات المثالية للعبة M_α فاذا كان $xBy > 0$ فان x, y تعتبر حلا اقتصاديا واذا كان $xBy = 0$ فان x, y تعتبر حلا غير اقتصادى للنموذج .

يلاحظ أنه اذا تحقق الغرض * فانه يوجد على الاقل عدد محدود من معاملات النمو α بحيث أن $V(M_\alpha) = 0$ ، $xBy > 0$ ، أما اذا تحقق الغرض * فان α تكون وحيدة ، واذا تحقق الغرض * و ** فان α تكون وحيده ويكون عندها $xBy > 0$.*

فاذا كانت $\alpha', \alpha'' \; (< \alpha')$ قيمتين مختلفتين لـ α بحيث أن :

$$V(M_{\alpha'}) = V(M_{\alpha''}) = 0$$

فان $V(M_\alpha) = 0$ وذلك لجميع قيم α التى تقع فى الفترة :

$$\alpha' \geqslant \alpha \geqslant \alpha''$$

واذا كانت x' ، y'' استراتيجيات مثالية فى $M_{\alpha'}$ ، $M_{\alpha''}$ على الترتيب فان (x', y'') استراتيجيات مثالية فى M_α لجميع قيم α فى نفس الفترة .

لبرهنة ذلك سنفرض أن x استراتيجية مثالية لـ k_1 فى $M_{\alpha'}$. $x' M_{\alpha'} \geqslant 0$
واذا كانت α أى عدد أقل من α' فان :

$$x' M_\alpha = x'(B - \alpha A) = X'(B - \alpha' A) + x'(\alpha' - \alpha) A \geqslant 0$$

* Cf. (6).

ومن ذلك نستنتج أن :

$$(6) \quad v(M_\alpha) \geqslant 0$$

وبالمثل سنفرض أن y'' استراتيجية مثالية للاعب K_2 فى $M_{\alpha''}$. اذا $M_{\alpha''}\, y'' \leqslant 0$ فاذا كانت α أى عدد أكبر من α'' فان :

$$M_\alpha \; y'' = (B - \alpha A) \; y'' = (B - \alpha'' A)\, y'' + (\alpha'' - \alpha) \; Ay'' \leqslant 0$$

ومن ذلك نستنتج أن :

$$(7) \quad v(M_\alpha) \leqslant 0$$

من (7) , (6) نرى أن $v(M_\alpha) = 0$ وأن (x', y'') استراتيجيات مثالية فى M_α للفترة $\alpha' \geqslant \alpha \geqslant \alpha''$.

سنفرض الآن أن u_i هو التوقع الرياضى اذا استخدمنا الاستراتيجية البسيطة i ضد الاستراتيجية المركبة المثالية y^* :

$$u_i^* = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, y_j^*$$

حيث

$$(m_{ij}) = M_\alpha , \quad i=1,\dots, p$$

وبالمثل سنفرض أن h_j هو التوقع الرياضى اذا استخدمنا الاستراتيجية البسيطة j ضد الاستراتيجية المركبة المثالية x^* :

$$h_j = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} \; x_i^* \quad , \quad j = 1,\dots, n$$

ومن نظرية النهاية الصغرى للنهايات العظمى نستنتج أن :

$$\max_i \; u_i^* = \min_j \; h_j^*$$

و

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* x_i^* = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} h_j^* \, y_j^* = 0$$

من ذلك نرى أنه اذا كان $x_i^* > 0$ فان $u_i^* = 0$

واذا كان $y_j^* > 0$ فان $h_j^* = 0$

أى أن كل عملية انتاجية تدخل فى متجه التشغيل الأمثل تعطى قيمة صفرا اذا استخدم متضد نظام مثالى من الأسعار ، ومن ناحية أخرى فان كل منتج له قيمة موجبه فى متجه السعر الأمثل يعطى صفرا اذا استخدم مضد متجه التشغيل الأمثل .

ونرى أيضا أنه اذا كان $U_i^* < 0$ فان $X_i^* = 0$

واذا كان $h_j^* > 0$ فان $y_j^* = 0$

أى أن متجه التشغيل الأمثل لا يحتوى على عملية مستخدمه بطاقة موجبه تعطى أقل من صفر اذا استخدم متضد متجه سعرى أمثل ، ومن ناحية أخرى فان متجه السعر الأمثل لا يحتوى على منتجات تعطى قيمة أكبر من الصفر اذا استخدم متضد متجه التشغيل الأمثل .

واذا فرضنا أن x_2^* ، x_1^* متجهين مثاليين و X تكوينة خطية من هذين المتجهين فان :

$$X = t\, x_1^* + (1-t)\, x_2^* \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

نستنتج من نظرية النهاية الصغرى للنهايات العظمى أن :

لجميع قيم y $\quad x_1^* A y \geqslant 0, \quad X_2^* A y \geqslant 0$

أى أن

لجميع قيم y $\quad \left[(t_1 x_1^* + (1-t)\, x_2^*\right] A y \geqslant 0$

أى أن متجه السعر X مثالى لكل قيمة من قيم t ، وحيث أننا يمكن أن نأخذ t اختياريا فانه إذا كان لدينا أكثر من متجه مثالى X فانه يوجد عدد لا نهائى من المتجهات المثالية ، وهذه الخصائص تنطبق أيضا على نظام السعر .

٢٠٣ اللعبة المعرفة فى النموذج كبرنامج خطــى

سنفرض أن $M_\alpha = (m_{ij})$ حيث

$$i = 1, \dots, p,$$
$$j = 1, \dots, n.$$

هى اللعبة المعرفة فى النموذج ، سنعبر عن قيمة اللعبة كدالة فى α وذلك بالنسبـــة لمصفوفه مربعة منتظمة $B\ (r \times r)$ حيث $r \leqslant \min\ (p,n)$ كالتالى :ـ

سنفرض أنه توجد استراتيجية مثالية y^* لـ k_2 بحيث أن جميع الاستراتيجيــات البسيطة لـ k_1 المقابلة لـ y تعطى توقعا رياضيا مساويا لقيمة اللعبة :

$$By^* = VI_r'$$

حيــث

I_r' يمثل المتجه العمودى المكون من عناصر عددها r مساوية للوحدة ، ونحصل على :

$$y^* = V\, B^{-1}\, I_r'$$

وحيث أن y^* هو متجه احتمالى فان :

$$1 = I_r y^* = v\ I_r\ B^{-1}\ I_r'$$

حيث

I_r يمثل المتجه الصفى المكون من عناصر عددها r مساوية للوحدة ، ونحصل على :

$$V = \frac{1}{I_r\, B^{-1}\, I_r'}$$

وللبحث عن α^* التى تعطى قيمة اللعبة صفر نحل المعادلة :

$$\frac{1}{I_r \; B^{-1} \; I_r'} = 0$$

سنعوض عن α^* فى اللعبة المعرفة بواسطة B ونحصل على B_{α^*}

سنفرض أن E مصفوفة (rxr) جميع عناصرها تساوى واحد وأن k عدد موجب اذا B و (B + KE) لهما نفس الاستراتيجيات المثالية لاثبات ذلك سنفرض أن x^*, y^* هى الاستراتيجيات المثالية لـ B ، اذا :

$$X^* B \geqslant 0, \quad By^* \leqslant 0,$$

$$x^*(B + kE) = x^* B + K(x^* E)$$

$$\geqslant (0,\dots,0) + (k,\dots,k)$$

$$= (k,\dots,k)$$

وبنفس الطريقة سنكتب :

$$(B + kE)\, y^* = By^* + k\,(E\, y^*)$$

$$\leqslant \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K \\ \vdots \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ \vdots \\ K \end{pmatrix}.$$

ونستنتج من ذلك أن قيمة اللعبة $(B + kE)$ هى K وأن كل استراتيجيـــــة مثالية فى B تعتبر استراتيجية مثالية فى $(B + kE)$

وبناء على ذلك فاننا سنضيف مصفوفة يكون فيها جميع العناصر مساو للقيمة المطلقـــة للعنصر السالب الذى له اكبر قيمة مطلقة للعبة B لنحصل على قيمة لعبة موجبة بدون تغـيـير الاستراتيجيات المثالية للاعبين ، سنفرض أن k هى هذه القيمة المضافة الى جميع قيم المصفوفة وسنكتـــب :

$$(B + kE) = D = (d_{rr})$$

وسنحلل الموقف بالنسبة لـ k_1

$$\sum^{r} d_{qq} x_q \geqslant k \qquad q=1,\dots,r$$

$$\sum_{q=1}^{r} x_q = 1$$

وبالقسمـــة على $k(k > 0)$

ينتج أن :

$$\sum_{q=1}^{r} d_{qq} \frac{x_q}{k} \geqslant 1, \quad \sum_{q=1}^{r} \frac{x_q}{k} = \frac{1}{k}$$

سنأخـــذ

$$u_q = \frac{x_q}{k} \quad , \quad z = \frac{1}{k}$$

وينتج من ذلك أن :

$$\sum_{q=1}^{r} d_{qq} u_q \geqslant 1, \quad \sum_{q=1}^{r} u_q = z$$

أى أن اللاعب الأول يختار X بطريقة تجعل k أكبر ما يمكن أى بطريقة تجعل Z أصغر ما يمكن ، ويمكن أن نكتب المشكلة فى الصورة الاتية :ـ

ما هى $U_1, \ldots, U_m$ التى تجعل

$$Z = \sum_{q=1}^{r} U_q$$

نهاية صغرى

تحت القيود الاتية :ـ

$$\sum_{q=1}^{r} d_{qq} U_q \geqslant 1, \quad U_q \geqslant 0$$

وبالمثل نجد من وجهة نظر k_2 ، أن :

$$\sum_{q=1}^{r} d_{qq} y_q \leqslant k, \quad q=1,\ldots,r ,$$

$$\sum_{q=1}^{r} y_q = 1 \quad , y_q \geqslant 0$$

وبالقسمة على $k (k > 0)$ نحصل على :

$$\sum_{q=1}^{r} d_{qq} \frac{y_q}{k} \leqslant 1, \quad \sum_{q=1}^{r} \frac{y_q}{k} - \frac{1}{k}$$

سنكتب

$$W_q = \frac{y_q}{k} \quad , H = \frac{1}{k}$$

ينتج من ذلك أن :
$$\sum_{q=1}^{r} d_{qq} w_q \leqslant 1, \quad \sum_{q=1}^{r} w_q = H$$

أى أن اللاعب الثانى يختار y بطريقة تجعل K أصغر مايمكن أى بطريقة تجعل H أكبر ما يمكن ، ويمكن أن نكتب المشكلة فى الصورة الاتيـة :ـ

ما هى $W_1, \ldots, W_q$

نهاية عظمى
$$H = \sum_{q=1}^{k} W_q$$

تحت الشروط الآتيـة :
$$\sum_{q=1}^{r} d_{qq} W_q \leqslant 1, \quad W_q \geqslant 0$$

وهكذا فأن اللعبة المعرفة فى النموذج قد تحولت الى برنامج خطى يسمح شكله الخاص بوجـود حـل لـه .

٤٠٢ حساب معامل النمو والاسترتيجيات المثالية فى النموذج :

سنفرض أن $B(rvr)$ مصفوفة منتظمة وأنه توجد استراتيجية مثالية y لـ k_2 بحيث أن جميع الاستراتيجيات المثالية لـ k_1 التى تقابل y^* تعطى توقعا رياضيا مساويا لقيمة اللعبة ، وسنكتب :
$$By^* = v\, I_r', \quad y^* = V\, B^{-1}\, I_r'$$

ونستنتج من ذلك أن :
$$1 = I_r\, y_r^* = V\, I_r\, B^{-1}\, I_r'$$

ونحصـــل علـــى :

$$V = \frac{1}{I_r\ B^{-1} I_r'},\quad y^* = \frac{B^{-1}\ I_r}{I_r\ B^{-1}\ I_r'}$$

ومن ناحية أخرى اذا كانت X^* استراتيجية مثالية لـ k_1 بحيث أن جميـــــع الاستراتيجيات المثالية لـ k_2 التى تقابل x^* تعطى عائدا مساويا لقيمة اللعبة فإن :

$$B' X^* = V\ I_r',\quad x^* = v\ (B')^{-1}\ I_r'$$

ونستنتج من ذلك أن :

$$1 = I_r\ x^* = v\ I_r\ (B')^{-1}\ I_r'$$

ونحصـــل علـــى :

$$V = \frac{1}{I_r\ (B')^{-1} I_n'},\quad X^* = \frac{(B')^{-1}\ I_r'}{I_r (B')^{-1} I_r'}$$

سنفرض أن $B(r\times r)$ مصفوفة غير معزولة برتبة $r \leqslant \min(p,n)$ ، لكى نبحـث عن α^* التى تعطى $v(B_\alpha) = 0$ نكتـب :

$$\frac{1}{I_r\ B^{-1}\ I_r'} = 0$$

ونعوض عن القيمة التى حصلنا عليها من α^* فى اللعبة المعرفة بواسطة B . سنضيـف للمصفوفة B مصفوفة تساوى جميع عناصرها القيمة المطلقة للعبة B وذلك للحصول علـــى

قيمة موجبة للعبة بدون تغيير الاستراتيجيات المثالية للاعبين ، فاذا كانت k هذه القيمة فان $v = k$. سنتأكد أن الاستراتيجيات المثالية (x_r^* , y_r^*) تتحقق بحيث أن جميع الاستراتيجيات البسيطة للاعب المقابلة لاستراتيجية مركبة للخصم تعطى عائدا متوقعا مساويا لـ k وذلك بحساب :

$$D = (B')^{-1} \; I_r' \quad , \; R = B^{-1} \; I_r'$$

فاذا كانت عناصر المصفوفة D والصفوفة R لها نفس الاشارة فان :

$$X_r^* = \frac{D}{I_r \; (B')^{-1} \; I_r'} , \; y_r^* = \frac{R}{I_r \; B^{-1} \; I_r'}$$

وفى الاعمدة التى عددها $p-r$ التى لا تظهر فى B فى المصفوفة M_α ونحصل بالتالى على متجهين x,y مكملين ذات أحجام p , n على الترتيب ، ويجب التحقق من أن :

$$\max_{i} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \, y_j^* = \min_{j} \sum_{j=1}^{p} m_{ij} \, X_i^* = k$$

وتطبق هذه الطريقة على كل مصفوفة جزئية فى M_α لكل قيمة α^* للحصول على جميع الحلول الاساسية ، وحيث أن عدد هذه المصفوفات الجزئية محدود فاننا نحصل على عدد محدود من الحلول الاساسية ، وبحساب التكوينات الخطية المحدبة للحلول الأساسية ، يمكن ايجاد جميع الحلول الخاصه بالنموذج .

٣ • الفصل الثالث

قيمة النهاية الصغرى للنهايات العظمى واللعبة العامة

يلاحظ أنه بينما يعتبر مبدأ النهاية الصغرى للنهايات العظمى أساس لدراسة الالعاب الثنائية الصغرية فإنه يعتبر أيضا أساس لدراسة الالعاب الاستراتيجية العامة • ستبين مناقشة اللعبة المكونة من ثلاثة أشخاص في ٣ • ١ أن الحل يتكون بصفة عامة من نظام من التكوينات وذلك بدلا من تكوينة واحدة في اللعبة الثنائية الصفرية ، وتبنى المعايير التي تميز نظام من التكوينات كحل للعبة العامة على قيمة النهاية الصغرى للنهايات العظمى لجميع التحالفات الممكنة (الدالة المميزة) كما سنرى في هذا الفصل •

٣ • ١ أهمية التعويضات بين اللاعبين في اللعبة المكونة من ثلاثة أشخاص (أو أكثر)

سنوضح أولا ضرورة التعويضات بين اللاعبين في اللعبة الثلاثية وذلك عن طريق تحليل الشكل المكثف للعبة ، وسيقودنا ذلك الى دراسة الاشكال الطبيعية للعبة عندما يتحد لاعبان ضد اللاعب الثالث وفي النهاية سوف نطبق النتائج التي نتوصل اليها على مثال عندما تكون المعلومات تامة أو غير تامة •

سنعتبر الآن اللعبة Γ ذات المعلومات التامة حيث تشير $m_1, \ldots, m_v$ الى خطوات اللعبة ، σ_1 ، σ_2 ، ... ، σ_v الى الاختيارات المرتبطة بهذه الخطوات ($\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_v)$ الى المباراة الناتجة عن هذه الاختيارات ، $\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_v)$ F_j الى العائد من هذه المباراة للاعب ($j = 1, 2$) •

سنفرض أن الخطوات $m_1, \ldots, m_{v-1}$ قد نفذت وأن نتائج الاختيارات فيها هي $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{v-1}$ وسنعتبر الخطوة الاخيرة m_v

واختيارها σ_v . فاذا كانت هذه الخطوة عشوائية أى أنه اذا كانت $0 = k_v(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1})$ فان مختلف القيم الممكنة $\sigma_v = (1, 2, \alpha_v(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1}))$ تحدث بالاحتمالات :

$$P_v(1), P_v(2), \ldots, P_v\left[\alpha_v(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1})\right]$$

علىٰ الترتيب ، واذا كانت هذه الخطوة شخصية للاعب k أى أنه اذا كان

$$k_v(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1}) = K = 1, 2$$

فان اللاعب K سيختار σ_v بطريقة تعظم الدالة

$$F_k\left[\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1} : \sigma_v)\right] :$$

سنشير الى σ_v بالرمز $\sigma_v(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1})$ وفى ضوء ذلك يمكن أن نقول أن قيمة اللعبة معروفة لكل لاعب $j = 1, 2$ بعد الخطوات $m_1, m_2, \ldots, m_{v-1}$ أى كدالة فى $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{v-1}$ فقط ، وفى الواقع يمكن أن نكتب :

$$F'_j\left[\pi'(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1})\right] = \sum_{\sigma_v = 1}^{\alpha_v(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1})} P_v(\sigma_v)\, F_j(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1}, \sigma_v)), \quad K_v(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1}) = 0,$$

$$= F_j\left[\pi\left\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1} : \sigma_v(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1})\right\}\right]$$

التى تعظم :

$$F_k\left[\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1} : \sigma_v)\right],$$

$$K_v(\sigma_1, \ldots, \sigma_{v-1}) = K = 1, 2$$

ومعنى ذلك اننا يمكن أن نعالج اللعبة Γ كما لو كانت تتكون من $m_1, m_2, \ldots, m_{v-1}$ فقط (وبدون m_v) ، وبهذه الطريقة فاننا حذفنا الخطوة m_v وتكرار

هذه العملية يمكن أن نحذف الخطوات $m_{v-1}, m_{v-2}, \ldots, m_2, m_1$
ونحصل فى النهاية على قيمة محددة للعبة .

هذه الطريقة ممكنة فى اللعبة الثنائية اذا كان اللاعب يخسر مايكسبه الآخر .

أما فى اللعبة الثلاثية فان اللاعب يمكن أن يتواجد فى موقف للاختيار بين بديلين يعطيان له نفس العائد ولكن يعطيان عوائد مختلفة للاعبين الآخرين ، وفى هذه الحالة فاننا نتوقع أن كلا من اللاعبين الآخرين سيعملان على تحريض هذا اللاعب على أختيار σ_v التى تعتبر أفضل بالنسبة له وذلك بأن يدفع له قيمة من عائده الاضافى الذى يحصل عليه بهذا التغيير ، ويمكن أن يتواجد أيضا اللاعب K فى موقف آخر للاختيار بين بديلين يعطيان له عوائد مختلفة ولكن أحد اللاعبين الاخرين سوف يدفعه لاختيار σ_v التى لا تعظم (σ_v و $F_K(\sigma_1, \ldots$ مما يجعله يتساءل عما اذا كانت خسارته ستعوض بالمكسب الاضافى لأحد اللاعبين الاخرين ، ويقود ذلك الى التعويضات بين اللاعبين التى يصعب دراستها على الشكل المكثف للعبة .

سنحاول الآن دراسة هذا الموقف من خلال الاشكال الطبيعية للعبة كالتالى :

سنفرض أن k_1, k_2 يكونان اتحادا a couple ضد k_3 فسيكون لدى اللاعب المركب $k_{1,2}$ المتغيرات T_1, T_2 ولدى k_3 المتغيرات T_3 بحيث أن :

$$H_1(T_1, T_2, T_3) + H_2(T_1, T_2, T_3) = - H_3(T_1, T_2, T_3)$$

تتكون الاستراتيجية المركبة للاعب $k_{1,2}$ من متجه الاحتمالات $\vec{\xi}$ وتتكون استراتيجية اللاعب الثالث من متجه الاحتمالات $\vec{\eta}$ ، وسنكتب التوقع الرياضى لـ $k_{1,2}$ فى الصورة :

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{T_1,T_2,T_3} \left[H_1(T_1, T_2, T_3) + H_2(T_1, T_2, T_3)\right] \xi_{T_1,T_2}\, \eta_{T_3}$$

$$= -\sum_{T_1,T_2,T_3} H_3 (T_1, T_2, T_3)$$

وقيمة اللعبة التى تنتج من اتحاد $k_{1,2}$ ضد k_3 هى قيمة النهاية الصغرى للنهايات العظمى لـ $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ التى سنشير اليها بالرمز c ، وبالمثل سنشير الى قيمة اللعبة الناتجة من اتحاد $K_{1,3}$ ضد K_2 بالرمز b والى قيمة اللعبة الناتجة من اتحاد $K_{2,3}$ ضد k_1 بالرمز a .

يلاحظ أن شرط حصول اللاعب الاول على حليف اذا رغب فى الحصول على الكمية x هو :

$$C - x + b - x \geqslant a$$

أى ان أقصى عائد يمكن أن يحصل عليه k_1 فى أى تحالف هو :

$$\frac{-a + b + c}{2} = \alpha$$

وبالمثل فان أقصى عائد يمكن ان يحصل عليه k_2 فى أى تحالف هو :

$$\frac{a - b + c}{2} = \beta$$

وأقصى عائد يمكن أن يحصل عليه k_3 فى أى تحالف هو :

$$\frac{a + b - c}{2} = \gamma$$

وسيكون الدافع الى التحالف متساوى لدى اللاعبين الثلاثة ويساوى الفرق بين العائد المتوقع للاعب فى تحالف معين وعائده المتوقع عندما يكون مستبعدا :-

$$= \alpha - (-a) = \beta - (-b) = \gamma - (-c) = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\Delta}{2}$$

وهذا الدافع يكون دائما أكبر من أن يساوى صفر وذلك لان k_3 يتوقع أن يحصل على c- اذا لعب بمفرده حتى ولو كان مستبعدا وبالمثل k_2 يتوقع أن يحصل على b- اذا لعب بمفرده حتى ولو كان مستبعدا ، وأقصى ما يمكن أن يحصل عليه k_2, k_3 معا هو a نستنتج من ذلك أن $a \geqslant -b-c$ أى أن $a+b+c \geqslant 0$ ونحصل على نفس النتيجة اذا حللنا مواقف اللاعبين k_1, k_3 أو k_1, k_2 وذلك بمقارنة عوائدهم المتوقعة بحسب ما اذا كانوا يكونون تحالفات أو لا .

سنعرف الآن القيم الاساسيه the basic values a' , b', c' للاعبين k_1, k_2, k_3 على الترتيب وذلك اذا لعب كل لاعب مستقلا عن اللاعبين الآخرين :

$$a' = \frac{-2a + b + c}{3} \ , \ b' = \frac{a - 2b + c}{3} \ , \ c' = \frac{a + b - 2c}{3}$$

سنكتب a' , b' , c' كدالة فى γ و β و α ، a , b , c كالتالى :

$$a' = \frac{-2a + b + c}{3} = - a + \frac{\Delta}{3} = \alpha - \frac{\Delta}{6} \ ,$$

$$b' = \frac{a - 2b + c}{3} = -b + \frac{\Delta}{3} = \beta - \frac{\Delta}{6} \ ,$$

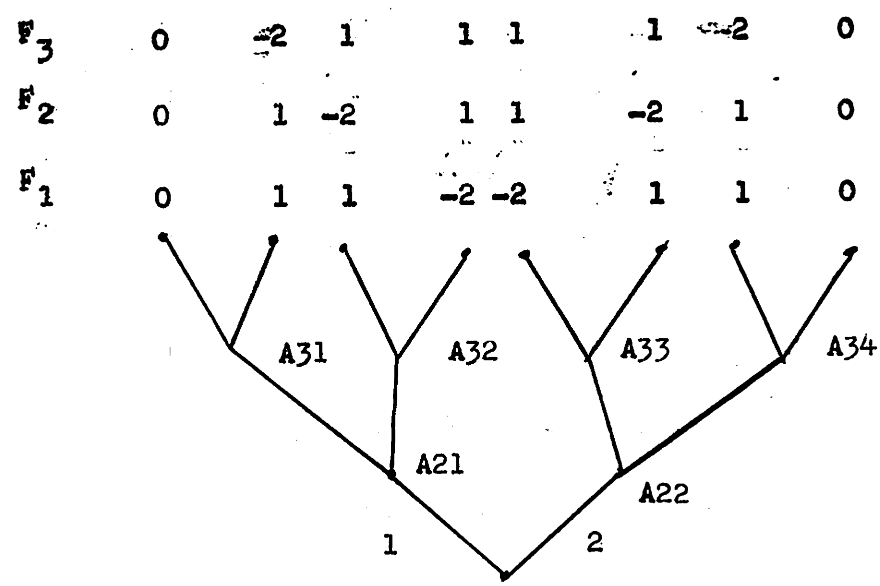
$$c' = \frac{a + b - 2c}{3} = -c + \frac{\Delta}{3} = \gamma - \frac{\Delta}{6} \ .$$

ونلاحظ أنه إذا كان $\Delta = 0$ فإن :

$$a' = -a = \alpha \ , \ b' = -b = \beta \ , \ c' = -c = \gamma$$

وفى هذه الحالة فاننا نقول أن اللعبة أساسية essential أى أن الاتحاد له سبب أن يتواجد . سنطبق الآن هذه النتائج على المثال التالى :

سنعرف لعبة ثلاثية ذات معلومات تامة يوجد فيها بديلين أمام كل لاعب وسنفرض أنه اذا اختار لاعبان نفس البديل فان اللاعب الثالث سيخسر وحدتين (موزعتين وحده لكل لاعب) واذا اختار الثلاثة لاعبين نفس البديل فانه لاتحدث مدفوعات بينهم . سنمثل اللعبة بالشكل التالى اذا لعب k_1 الخطوة m_1 ولعب k_2 الخطوة m_2 ولعب k_3 الخطوة m_3



نلاحظ أن k_3 سوف يكون فى A_{32} فى موقف غير مختلف لأن يختار بين 1 أو 2 لأنه سيكسب 1 فى الحالتين ، ومن مصلحة k_2 أن يعطى k_3 الكمية $2 < \varepsilon$ ليختار 2 بدلا من 1 وتصبح التوزيعة : ($1+\varepsilon$ $1-\varepsilon$ -2) ، ومن مصلحة R_1 أن يعطى k_3 الكمية $2 > \varepsilon$ ليختار 1 بدلا من 2 وتصبح التوزيعه : ($1+\varepsilon$ -2 $1-\varepsilon$)

ونلاحظ أيضا أن من مصلحة k_1 أو k_2 فى A_{33} أن يدفع k_3 لاختيار البديل المربح بالنسبة له على حساب اللاعب المستبعد .

سنحلل الان هذه اللعبة في شكلها الطبيعي بافتراض اتحاد لاعبين ضد اللاعب الثالث

فاذا اتحد k_1, k_3 ضد k_2 فان الشكل الطبيعي للعبة يكون

$$\begin{array}{cc|cccccccc}
 & & A_{31}\,A_{32} & A_{31}\,A_{32} & A_{31}\,A_{32} & A_{31}\,A_{32} & A_{33}\,A_{34} & A_{33}\,A_{34} & A_{33}\,A_{34} & A_{33}\,A_{34} \\
A_{21} & A_{22} & 1\;\;1 & 2\;\;2 & 1\;\;2 & 2\;\;1 & 1\;\;1 & 2\;\;2 & 1\;\;2 & 2\;\;1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & 2 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

ومنه نجد أن :

$$v(2) = -1\,,\; v(1,3) = 1,$$

$$\vec{\xi}^{*} = (\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;0\;0),\; \vec{\eta}^{*} = (\tfrac{1}{2}\;0\;0\;0\;\tfrac{1}{2}\;0\;0)$$

واذا اتحد k_1, k_2 ضد k_3 فان الشكل الطبيعي للعبة هو :

$$\begin{array}{cccc|cccc}
A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\
2 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2
\end{array}$$

ومنه نجد أن :

$$v(3) = -1, \quad v(1,2) = 1,$$

$$\vec{\xi}^{*} = (\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{1}{2} \;\; 0 \; 0), \quad \vec{\eta}^{*} = (\tfrac{1}{2} \;\; 0 \;\; 0 \;\; \tfrac{1}{2})$$

واذا اتحد k_2, k_3 ضد k_1 فان الشكل الطبيعى للعبة هو :

A_{22}	m_2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	1	1	2
	m_3	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
A_{21}	m_2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
	m_3	1	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
	1	0	1	1	-2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	-2	-2	-2
	2	-2	1	1	0	1	1	0	-2	1	0	-2	1	0	-2	1	1

ومنـــه نجد أن :

$$v(1) = -2,\ v(2,3) = 2,$$

$$\vec{\xi}^{*} = (½\ \ ½)\ ,\ \vec{\eta}^{*} = (0\ \ldots\ 0\ 1\ 00)$$

ونلاحظ أنه بالرغم من أن هذه اللعبة ذات معلومات تامة فان كل لاعب يملك استراتيجيات مثالية مركبـــة ٠

ونحصل من هذا المثال على $a = 2,\ b = 1,\ c = 1$ أى أن العائد الذى يمكـن أن يتوقعه اللاعب فى أى اتحاد هو 1 لـ K_2 أو k_3 وصفر لـ k_1 والدافع الى الاتحاد هو 2 والقيم الاساسية هى $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ - لـ k_3 ، k_2 ، k_1 على الترتيب٠

فاذا فرضنا أن كل طرف يختار استراتيجية بدون معرفة اختيار الطرف الآخر فان قيمـة اللعبة للاعب المنعزل هى 1- وقيمتها بالنسبة للاعبين المتحدين هى 1 ومنها نجد أن العائد الاقصى الذى يحصل عليه اللاعب فى أى اتحاد هو ½ وأن الدافع الى الاتحاد هو $\frac{3}{2}$ والقيمة الاساسية تساوى صفر لكل لاعب٠

نستنتج من ذلك أنه بالرغم من وجود تضاد فى المصالح فى الالعاب الثنائية الصفـرية فانه يمكن أن يحدث توازى كلى أو جزئى فى المصالح فى الألعاب التى تتكون من أكثر من لاعبين وذلك بالاضافة الى تضاد المصالح الذى يوجد لان الصراع هو أحد المكونات الاساسية فـــى كل لعبة ، ويمكن أن يقود هذا الموقف الى الاتحادات والتعويضات بين اللاعبين ٠

٢٠٣ الدالة المميزة the characteristic function

رأينا فى ١٠٣ أن امكانات الاتحادات والتعويضات بين اللاعبين تمثل العناصر الاستراتيجية فى اللعبة العامة ، وسنبين فى هذا الفصل كيف تشرح الدالة المميزة هذه العناصر بطريقة كمية . سنعرف أولا الدالة المميزة :

سنفرض أن S جزء من المجموعة $I = (1, \ldots, n)$ وأن $-S$ الجزء المكمل لهذه المجموعة فى I . سنعتبر اللعبة Γ النونية الصفرية التى تنتج من اتحاد جميع اللاعبين الذين ينتمون الى S ضد اتحاد جميع اللاعبين k الذين ينتمون الى $-S$. سنفرض أن $v(S)$ قيمة اللعبة للتحالف المكون من جميع اللاعبين $k \in S$ ، سيختار كل لاعب المتغير T_k وهو يجهل اختيارات اللاعبين الآخرين ويحصل على القيمة :

$H_k\ (T_1, \ldots, T_n)$ ، وحيث أن اللعبة صفرية فان :

$$\sum_{k=1}^{n} H_k\,(T_1, \ldots, T_n) = 0,$$

$$T_k = 1, \ldots, \beta_k\ , \quad k = 1, \ldots, n$$

نستنتج من اللعبة الثنائية المكونة بهذه الطريقة أن التحالف S (اللاعب الاول) يلعب ضد التحالف $-S$ (اللاعب الثانى) حيث يملك اللاعب الاول المتغيرات T^S ويملك اللاعب الثانى المتغيرات T^{-S} ويحصل اللاعب الاول على الكمية :

$$\bar{H}\,(T^S, T^{-S}) = \sum_{k \in S} H_k\,(T_1, \ldots, T_n)$$

$$= -\sum_{k \in -S} H_k\,(T_1, \ldots, T_n).$$

تتكون الاستراتيجية المركبة للاعب الاول من المتجه الاحتمالى $\vec{\xi}$ حيث :

$$\xi_{T^s} \geqslant 0 \quad , \quad \sum_{T^s} \xi_{T_s} = 1$$

وتتكون الاستراتيجية المركبة للاعب الثانى من المتجه الاحتمالى $\vec{\eta}$ حيث :

$$\eta_{T^{-s}} \geqslant 0 \quad , \quad \sum_{T^{-s}} \eta_{T^{-s}} = 1$$

والعائد المتوقع للاعب الاول هو :

$$k(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{T^s, T^{-s}} H(T^s, T^{-s})\, \xi_{T^s}\, \eta_{T^{-s}}$$

وقيمة اللعبة للتحالف s هى :

$$v(s) = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$$

تعرف(s) v لكل مجموعة $s \in I = (1, \ldots, n)$ وتسمى الدالة المميزة ، ومن أهم خصائص هذه الدالة :

أ ـ $V(\theta) = 0$ حيث تشير θ الى المجموعة الفارغة the empty set

ب ـ مجموع قيم الدالة المميزة لمجموعتين متكاملتين هو صفر :

$$v(-s) = -v(s)$$

لان قيمة اللعبة الصفرية للتحالف s هى $v(s)$ وللتحالف $-s$ هى $v(-s)$

جـ ـ $v(S \cup T) \geqslant v(s) + v(T) \quad , \quad S \cap T = \theta$

وذلك لان التحالف SUT يملك حرية أكبر للاختيار الاستراتيجى من التحالف T , s منفصلين .

من أ ، ب ، جـ نستنتج أن :

د ـ الدالة المميزة لمجموع اللاعبين تساوى صفر :

$$v(I) = 0$$

وذلك لان

$$v(I) = v(-\theta) = -v(\theta) = 0$$

هـ ـ

$$v(s_1 \cup \dots \cup s_p) \geqslant v(s_1) + \dots + v(s_p)$$

حيث s_p ، ... ،s_1 تتكون من مجموعات منفصلة من I

وذلك لان للتحالف $s_1 \cup \dots \cup s_p$ حرية أكبر فى الاختيار الاستراتيجى من التحالفات $s_1, \dots, s_p$ منفصلـــة .

و ـ

$$v(S_1) + \dots + v(S_p) \leqslant 0$$

حيث $S_1, \dots, S_p$ هى أجزاء غير منفصلة من I ،

$$S_1 + \dots + S_p = I$$

وذلك لان

$$v(S_1 \cup \dots \cup S_p) = v(I) = 0 \geqslant v(S_1) + \dots + v(S_p)$$

ويلاحظ أن الدالة المميزة يمكن أن تعرف فى اللعبة العامة (الغير صفرية) بطريقـــة مشابهة كالتالى :

سنعتبر اللعبة العامة Γ المكونة من لاعبين عددهم ن بالدوال :

$$H_k(T_1, \dots, T_n), \quad k=1,\dots,n$$

سنعرف لاعب تخيلى $(n+1)$ كالتالى :

$$H_{k+1}(T_1, \dots, T_n) = -\sum_{k=1}^{n} H_k(T_1, \dots, T_n) \tag{5}$$

حيث يتحكم اللاعبون الحقيقيون n ر ٠٠٠ ر ١ فى المتغيرات $T_1,\ldots,T_n$ على الترتيب ، ونحصل بهذه الطريقة على لعبة صفرية مكونة من n + ١ من الاشخاص وسنرمز لهما بالرمز $\bar{\Gamma}$ ، وسنكتب الدالة المميزة $v(s)$ للمجموعة $s \in I = (1, \ldots, n)$ كالتالى

$$(6) \qquad v(s) = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

تمثل $\vec{\eta}$ و $\vec{\xi}$ متجهات احتمالية تتكون من العناصر $\eta_{T^{-s}}$ و ξ_{T^s} على الترتيب حيث T هى تجميع the aggregate للمتغيرات T_k ، $k \in s$ و T^{-s} هى تجميع للمتغيرات T_k ، $k \in -s$ ،

$$(7) \qquad k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{T^s, T^{-s}} \bar{H}(T^s, T^{-s}) \, \xi_{T^s} \, \eta_{T^{-s}}$$

$$\bar{H}(T^s, T^{-s}) = \sum_{k \in s} H_k(T_1, \ldots, T_n)$$

٣٠٢ التساوى الاستراتيجى ـ الالعاب الاساسية والالعاب الغير أساسية

Strategic equivalence - essential and inessential games

سنفرض أنه بدلا من أن يحصل اللاعب k على الدالة ($H_k(T_1, \ldots, T_n)$ فانه يحصل على الدالة

$$H_k(T_1, \ldots, T_n) + \alpha_k^0$$

حيث α_k^0 مقدار ثابت ، فاذا كانت اللعبة صفرية فان :

$$(9) \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0$$

ونحصل على الدالة المميزة الجديدة فى الصورة :

$$(10) \qquad v'(s) = v(s) + \sum_{k \in S} \alpha_k^0$$

نلاحظ أن موقع كل لاعب فى اللعبة الجديدة ينتقل بكمية محددة ولكن الدوافع الى تكوين الاتحادات والتعويضات بين اللاعبين أى الامكانات الاستراتيجية للعبتين لا تتغير ، ويقال أن $v(s)$ فى تساوى استراتيجى مع $v'(s)$

سنكتب

$$(11) \quad \bar{v}(1) = \bar{v}(2) = \cdots = \bar{v}(n),$$

$$(12) \quad \bar{v}(1,\ldots,n) = 0 \;^{*}$$

أو بعبارة أخرى :

$$(13) \quad v(1) + \alpha_1^{o} = v(2) + \alpha_2^{o} = \ldots\ldots = v(n) + \alpha_n^{o}$$ و

$$(14) \quad v(I) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{o} = 0 \;^{**}$$

ومن (13) نجد أن :

$$\alpha_k^{o} = -v(k) + \beta$$

حيث β هى القيمة العامة للعناصر التى عددها n فى (13)

سنعيد كتابة (14) فى الصورة :

$$V(I) + n\beta - \sum_{k=1}^{n} V(k) = 0$$

نستنتج من ذلك أن :

$$\beta = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} v(k) - v(I)\right],$$

$$(15) \quad \alpha_k^{o} = -V(k) + \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} V(k) - V(I)\right]$$

---

* فى اللعبة الصفرية نجد أن هذا الشرط متحقق بالتعريف.

** فى اللعبة الصفرية نجد أن $v(I) = 0$.

تعرف الد الة $v(s)$ التى تحقق (15) و (10) بالشكل المختصر the reduced form وسنكتب :

$$(16) \quad \bar{v}(1) = \bar{v}(2) = \dots = \bar{v}(n) = -\gamma$$

اذ ا

$$-\gamma = v(k) + \alpha_k^{\circ}$$

ونجد من (15) أن

$$(17) \quad \gamma = \frac{1}{n}\left[v(I) - \sum_{k=1}^{n} v(k)\right]$$

وتطبيق (جـ) على المجموعات $(1), \dots, (n)$ نحصل على :

$$\bar{v}(1) + \bar{v}(2) + \dots + \bar{v}(n) \leqslant \bar{v}(I) ,$$

$$-n\gamma \leqslant v(I) = 0$$

ومنها نجـد أن :

$$(18) \quad \gamma \geqslant 0$$

فاذ ا كان p هو عد د اللاعبين الموجدين فى s فان :

$$\bar{v}(s) \geqslant \bar{v}(1) + \dots + \bar{v}(p)$$

أى أن

$$(19) \quad \bar{v}(s) \geqslant -p\gamma$$

وبالنسبة للمجموعة $-s$ التى تحتوى على عناصر عد د ها $n-p$ فان :

$$(20) \quad -(n-p)\gamma \leqslant v(-s)$$

ويلاحظ فى اللعبة العامة أنه اذ ا وضعنا $T=-s$ فى (جـ) فان :

$$v(s \cup -s) \geqslant v(s) + v(-s) ,$$

$$v(I) \geqslant v(s) + v(-s),$$

$$v(-s) \leqslant v(I) \quad -v(s),$$
$$\bar{v}(-s) \leqslant -\bar{v}(s) \qquad \left[\bar{v}(I) = 0\right]$$

وبناء على ذلك سنكتب (20) فى الصورة :

$$-(n-p)\gamma \leqslant -\bar{v}(s)$$

اذا

$$\bar{v}(s) \leqslant (n-p)\,\gamma$$

ومن (20) , (19) نرى أن :

$$-p\gamma \leqslant \bar{v}(s) \leqslant (n-p)\gamma \qquad (22)$$

يلاحظ من العلاقة الاخيرة أننا نحصل على متساوية فى الطرف الايسر عندما تكون $s = \Theta$ $s = 1$ (وذلك لان $\bar{v}(\Theta) = 0$, $\bar{v}(s) = -\gamma$ اذا كانت تحتوى على عنصر واحد) • ومن ناحية أخرى فان هناك متساوية فى الطرف الايمن عندما تتكون s من مجموع اللاعبين (لان $\bar{v}(I) = 0$) ، وفى اللعبة الصفرية نجد أن $\gamma = \bar{V}(S)$

اذا كانت S تحتوى على عناصر عددها n-1 وبالتالى فان هناك متساوية فى الطرف الايمن اذا كانت S تتكون من لاعبين عددهم n-1 •

تعبر γ عن العائد المتوقع من اللاعبين (n-1) اذا تصورنا أن اللاعب سوف يلعب استراتيجية النهاية الصغرى للنهايات العظمى ضدهم ، فاذا كانت $\gamma = 0$ فان (22) تعطى $\bar{v}(s) = 0$ أيا كانت قيمة p ، وفى هذه الحالة فان اللاعبين لا يكون

لهم دوافع الاتحاد ويقال أن اللعبة غير أساسية ، أما اذا كان $\gamma > 0$ فان اللاعبين يكون لهم دافع للاتحاد ويقال أن اللعبة أساسية ، وحيث أن γ هي القيمة المشتركة لـ $\bar{v}(k)$ أى لـ $v(k) + \alpha_k^0$

تكتب من (15) فى الصورة :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k) - v(I)$$

اذا

$$\gamma = -\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} v(k) - v(I)\right]$$

نستنتج من ذلك أن اللعبة Γ غير أساسية اذا كانت :

$$\sum_{k=1}^{n} v(k) - v(I) = 0$$

وأساسية اذا كانت :

$$v(k) - v(I) \quad 0$$

ويلاحظ أن اللعبة تكون غير أساسية اذا أمكن كتابة الدالة المميزة $v(s)$ فى الصورة :

$$v(s) = \sum_{k \in S} \alpha_k^0 \tag{26}$$

وذلك لان هذه المعادلة تعنى من (10) أن $v(s)$ فى تساوى استراتيجى مع $v(s)$ وبالمثل فان اللعبة Γ غير أساسية اذا كانت قيمة الدالة المميزة لها $v(s)$ فى الصورة :

$$v(S \cup T) = v(s) + v(T) , \quad S \cap T = \theta \tag{27}$$

وذلك لان $v(s)$ فى الشكل المعطى فى (26) له هذه الخاصية ، ولاثبات أن هذا الشرط ضرورى نرى من (هـ) أن :

$$v(S_1 \cup \dots \cup S_p) = v(s_1) + \dots + v(s_p)$$

اذا كانت $S_1, \dots, S_p$ مجموعات منفصلة

فاذا كان p هو عدد اللاعبين الموجودين فى المجموعة $s = (k_1, \dots, k_p)$ فان

تعطـــى : $S_1 = k_1, \ldots, s_p = k_p$

$$v(s) = v(k_1) + \ldots + v(k_p)$$

ونستنتج من ذلك أن :

$$v(s) = \sum_{k \in S} \alpha_k^{o},$$

$$\alpha_1 = V(1), \ldots, \alpha_n = v(n)$$

أى أن Γ لعبة غير أساسيـــــة ·

٤٠٣ حل اللعبة العامـــــــــة :

يلاحظ أن الدالة المميزة للاعب واحد هى قيمة النهاية الصغرى للنهايات العظمى لهــذا اللاعب بغض النظر عن تصرف اللاعبين الآخرين ، وبناء على ذلك فان كل توزيعة فى أى تحالــف يجب أن تكون أكبر من أو تساوى دالته المميزة بشرط أن مجموع عناصر التوزيعة لمجموعة متحـــدة من اللاعبين يساوى قيمة النهاية الصغرى للنهايات العظمى لهذه المجموعة ، وبعبارة أخـــرى فاننا نعرف التوزيعه بالمتجه $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ بحيث أن

$$(28) \quad \alpha_i \geqslant v(i) \qquad i=1,\ldots,n;$$

$$(29) \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(I)$$

حيـــــث

$$v(I) \begin{cases} = \max\limits_{T_1,\ldots,T_n} \sum\limits_{k=1}^{n} H_k(T_1,\ldots,T_n) & \text{فى اللعبة العامـــة} \\ = 0 & \text{فى اللعبة الصفريـــة} \end{cases}$$

أى أن التوزيعات التى يتكون منها الحل تمثل مجموع النتائج التى تحقق الشرط المزدوج

للرشادة الفردية والجماعية .

يتكون ثبات هذه التوزيعات من فعالية المجموعة S أى المجموعة التى يكون فيها اللاعبون مقتنعين بامكانية الحصول على ماتعطيه هذه التوزيعه اى أن مجموع التوزيعات للاعبين المنتميين للمجموعة S يكون محددا بالدالة المميزة لهم :

$$(30) \quad \sum_{i \in S} \alpha_i \leqslant v(S)$$

ومن ناحية أخرى سنفرض أن التكوينة $\vec{\alpha}$ تسود التكوينة $\vec{\beta}$ اذا وجد تحالف يكون فيه اللاعبون مقتنعين بامكانية الحصول على الاقل على قيمة النهاية الصغرى للنهايات العظمى لهذا التحالف فى $\vec{\alpha}$ واذا كان كل لاعب فى هذا التحالف يامل فى الحصول فى $\vec{\alpha}$ على عائد اكبر من العائد الذى يمكن أن يتوقعه فى $\vec{\beta}$ وبعباره أخرى فان التكوينة $\vec{\alpha}$ تسود التكوينة $\vec{\beta}$ اذا كان :

(i) التحالف s غير خالى .

(ii) التحالف s فعال effective لـ $\vec{\alpha}$.

(iii) $\alpha_i > \beta_i$ لجميع رقم $i \in s$

يتكون حل اللعبة العامة من مجموعة V من التوزيعات ذات الخصائص الآتية :

أ - عدم سيادة أى تكوينة $\vec{\beta}$ تنتمى الى V لتكوينة أخرى $\vec{\alpha}$ تنتمى الى V .

ب - سيادة تكوينة واحدة على الاقل من التكوينات المنتمية الى V لاى تكوينة غير منتمية الى V .

تعبر هذه الفكرة عن أن نوع السلوك the standard of behavior الذى يقود له الحل خالى من التناقضات الداخلية (لا توجد سيادة بين التوزيعات التى تنتمى الى نفس الحل) . ومن ناحية أخرى فان هذا النوع من السلوك لا يقبل أى عملية

غير موافقة (لا توجد توزيعة خارجة عن الحل غير مساد ة بواسطة توزيعه على الاقل من التوزيعات التي تنتمى الى الحل) .

نستنتج من ذلك أن هذه الفكرة لا تستبعد امكانية وجود توزيعه $\vec{\beta}$ لا تنتمى الى الحل تسود توزيعه أخرى تنتمى اليه ، وفى هذه الحالة فانه من الضرورى وجود توزيعه تنتمى الى الحل تسود $\vec{\beta}$ * ، هذه الضرورة تظهر عدم تعدى السيادة وتبين أن هناك احتمالا كبيرا لوجود حلول عديدة لنفس اللعبة أى أن هناك طرقا مختلفة لتنظيم المجتمع أو أنواعا مختلفة مقبولة من السلوك لنفس الاطار الاجتماعى ، هذه الأنواع من السلوك ثابته ومتلاحمة مع بعضها ولكنها يمكن أن تكون فى تناقض أحدها مع الاخر .

نلاحظ أيضا أن الحل فى اللعبة الغير أساسية يتكون من توزيعه واحدة ويتضح ذلك اذا اعتبرنا التوزيعه :

$$\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) ,$$
$$\beta_i = v(i) + \varepsilon_i$$

---

* نرى على سبيل المثال فى اللعبة الثلاثية التى عرضناها فى ٣٠١٠٢ أن $a = b = 1$ وأن العائد الاقصى الذى يتوقعه اللاعب فى أى اتحاد هو ½ ، ونستنتج من ذلك الحل الاتى :

$$\vec{\alpha}_1 = (½ \quad ½ \quad -1).$$
$$\vec{\alpha}_2 = (½ \quad -1 \quad ½),$$
$$\vec{\alpha}_3 = (-1 \quad ½ \quad ½),$$

ونلاحظ أن $\vec{\beta} = (1 \quad 0 \quad -1)$ تسود $\vec{\alpha}_2$ ولكنها مساد ة ب α_3 .

من (29) و (28) نجد أن :

$$V(i) + \varepsilon_i \geqslant V(i)$$

ونستنتج من ذلك أن

$$\varepsilon_i \geqslant 0 \qquad \text{و} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} V(i) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = V(I) \;,$$

$$\sum_{i=1}^{n} V(i) - V(I) = -\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

أن:

فاذا كانت Γ غير أساسية فاننا نستنتج من

$$\sum_{i=1}^{n} V(i) - V(I) = 0$$

ونستنتج من (32) و (31) أن:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 0$$

أى أن حل اللعبة Γ يتكون من التوزيعه :

$$(33) \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

حيث

$$\alpha_i = V(i) \quad \text{و} \quad i = 1, \ldots, n$$

نلاحظ أن اللعبة العامة المكونة من شخص واحد لعبة غير أساسية لانه طبقا لـ (17)

نجد أن $\gamma = 0$ أى أن Γ لها حل واحد :

$$\alpha_1 = V(1) = V(I) = \underset{T}{} H(T)$$

أ ما اللعبة المكونة من شخصين فان :

$$V(S) = \begin{cases} 0 \\ -\gamma \\ 0 \end{cases} \quad \text{حيث S تتكون من العناصر} \quad \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

فاذا كانت $\gamma = 0$ فان $\bar{V}(S) = 0$ وتكون اللعبة غير أساسية ويتكون الحل

فى هذه الحالة من التوزيعة (0 0) ، أما اذا كانت $\gamma > 0$ فان الحل يتكون

من التوزيعة $\vec{\alpha} = (\alpha_1 \quad \alpha_2)$ حيث :

$$\alpha_1 \geqslant V(1) \quad \text{و} \quad \alpha_2 \geqslant V(2) \;, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = V(1, 2) \;.$$

يلاحظ أننا نحصل على قيمة النهاية الصغرى للنهايات العظمى للتحالف S على أساس أن هذا التحالف يرغب فى تعظيم قيمته المتوقعه $k(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ بينما أن التحالف المضاد $-S$ يرغب فى تصغير هذه القيمة .

ونجد فى اللعبة العامة أن رغبة للتحالف S - ليست تخفيض القيمة المتوقعة $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ للتحالف S ولكن زيادة توقعه الرياضى $\bar{k}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ هذان الميدآن يتفقان اذا كان تخفيض $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ يساوى زيادة $\bar{k}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ كما فى اللعبة الصفرية ولكن فى اللعبة العامة نجد أن مكسب مجموعة من اللاعبين يمكن الا يكون بالضرورة خسارة للاعبين الآخرين ويجعلنا ذلك نتساءل عما اذا كانت الدالة المميزة وسيلة مناسبة لمعالجة اللعبة العامة . وسوف نناقش ذلك الآن بدراسة السوق المكونة من شخصين ودالته المميزة بتحليل التحويلات التى تتم بين بائع (اللاعب الاول) ومشترى (اللاعب الثانى) وسوف يكون ذلك مطابقا للمشكلة الاقتصادية التقليدية للاحتكار الثنائى . سنفرض أن اللعبة تتعلق ببيع وحدة A من منتج معين وأن قيمة امتلاك هذه الوحدة بالنسبة للبائع هى u وقيمة امتلاكها بالنسبة للمشترى هى v . وحتى تكون لهذه الصفقة معناها فانه يجب أن يكون قيمة A بالنسبة للمشترى أكبر من قيمتها للبائع أى يجب أن يكون:

$$(37) \qquad u < v$$

يعرض البائع على المشترى السعر p فاذا قبل المشترى هذا السعر فان البائع يحصل على p ويحصل المشترى على $v - p$. واذا رفض فان البائع يحصل على u ويحصل المشترى على 0 .

يلاحظ أن البائع سيكون طبقا لهذه القواعد فى موقف غير مختلف ليبيع ولا عندما تكون $p = u$ أى عندما يكون السعر المقبول بواسطة المشترى مساويا لمنفعة A وفى هذه الحالة فان اللاعب الاول يمكن أن يكون متأكدا من الحصول على u واذا عرض السعر $p = u$ ويكون اللاعب الثانى متأكدا من أن اللاعب الاول يحصل على u برفض كل سعر أى أن :

$$(38) \qquad v(1) = u$$

ومن ناحية أخرى فان المشترى يكون فى موقف غير مختلف للشراء أو عدم الشراء عندما تكون $p=V$ أى عند ما يكون السعر المقبول منه مساو لمنفعة A بعد الشراء، وفى هذه الحالة فان اللاعب الثاني يمكن أن يكون متأكدا من الحصول على $v-p = 0$ (بشراء A أو عدم شرائها) ، ويكون اللاعب الاول متأكدا أن اللاعب الثاني لا يحصل على أكثر من $V-p = 0$ (ببيع A أوعدم بيعها) . أى أن :

$$(39) \qquad V(2) = 0$$

ويحصل اللاعبان معا على u أيهما أكبر، أى أن : $p + (v - p) = V$

$$(40) \qquad v(1,2) = V$$

ومن (40) ,(39) ,(38) نحصل على الحل الاتى :

$$\alpha_1 \geqslant u \quad , \alpha_2 \geqslant 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = V$$

ونلاحظ أن النتيجة المنطقية هى أن :

$$(41) \qquad u \leqslant p \leqslant V$$

وهي متفقة مع الحل المبني على الدالة المميزة .

سنفرض الان أن رغبة المشترى فى الحصول على ربح اكثر من رغبته فى إيقاع خسارة على البائع ، وأن هذا الفرض يمكن أن يتحقق عند ما يعرض البائع على المشترى سعرا معينا $u < P_0 < V$ ، يحصل المشترى فى هذه الحالة على $V - P_0$ اذا قبل هذا السعر وصفر اذا رفضه ويحصل البائع على P_0 اذا قبل المشترى السعر و u اذا رفضه ، وبالتالى فان المشترى سوف يقبل P_0 وفى ضوء هذه الشروط فان البائع يحصل على $u > P_0 > V$ التى لا تتفق مع الفترة (41) .

نستنتج من ذلك أن أى تغيير فى طريقة تكوين الدالة المميزة يؤدى الى تغيير النتيجة تغييرا أساسيا .

من ناحية أخرى فاننا نفترض أن جميع الحلول الخاصه بالمباراه العامة تقابل تحقيق اكبر منفعة بواسطة مجموع اللاعبين ، وعندما تتحقق هذه المنفعة فان مكسب مجموعة من اللاعبين يجب أن يعوض بخسارة من الاخرين ، وأخيرا فاننا نلاحظ أن التهديد بإيقاع خسارة على الخصم هو الوسيلة لفرض ضغط عليه ذلك لانه سوف يضطر تحت هذا التهديد الى أن يقدم تعويضات أو يعدل استراتيجيته ، ومن الضرورى أن تؤخذ هذه الامكانات الاستراتيجية فى الاعتبار عند تحليل اللعب .

ونلاحظ أن المشكلة الاساسية فى اللعبة العامة المكونة من أشخاص عددهم ن هى معرفة الدوافع الى تكوين الاتحادات والتهديدات والتهديدات المضادة والتعويضات بين اللاعبين المتحدين الخ ، هذه الامكانات الاستراتيجية لا تدخل فيها "الخديعة" بالمعنى المفهوم من ١٠٥٠١ لانه توجد هنا معلومات كاملة بين اللاعبين ولا يوجد أى شك .

المراجـــع

1. Bouzitat, J., "Présentation synthétique de la théorie des jeux", Cahier no 7 du bureau universitaire de recherche opérationnelle, paris, 1965.

2. Davis, M., "La théorie des jeux", Armand Colin, Paris, 1973.

3. Dresher, M., Kuhn, H., Tucker, A., Wolfe, P., Luce, R. (editors), "Contributions to the theory of games", no. 24, 28, 39, 40; Princeton Univeristy Press, 1950, 1953, 1957, 1959.

4. Dresher, M., Shapley, L., Tucker, A., (editors), "Advances in game theory", Annals of Mathematics Studies", 52, Princeton Univeristy Press, 1959.

5. Karlin, S., "Mathematical methods and theory in games, programming and economics", Vol. 1,2; Pergamon Press, 1959.

6. Kemeny, J., Morgenstern, O., Thomson, G.,"A generalisation of the Von Neumann model of an expanding economy"., Econometrica, 24, 1956.

7. Shubik, M., "Stratégie et structures des marchés, concurrence, oligopole, théorie des jeux", Dunod, Paris, 1964.

8. Tucker, A. Kuhn, H., "Linear inequalities and related systemes", Ann. Math. Studies, 38, Princeton University Press, 1956.

9. Vajda, S., "Théorie des jeux et programmation linéaire", Dunod, Paris, 1969.

10. Von Neumann, J. , Morgenstern, O., "Theory of games and Economic behavior", Princeton University Press, 1953.